This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

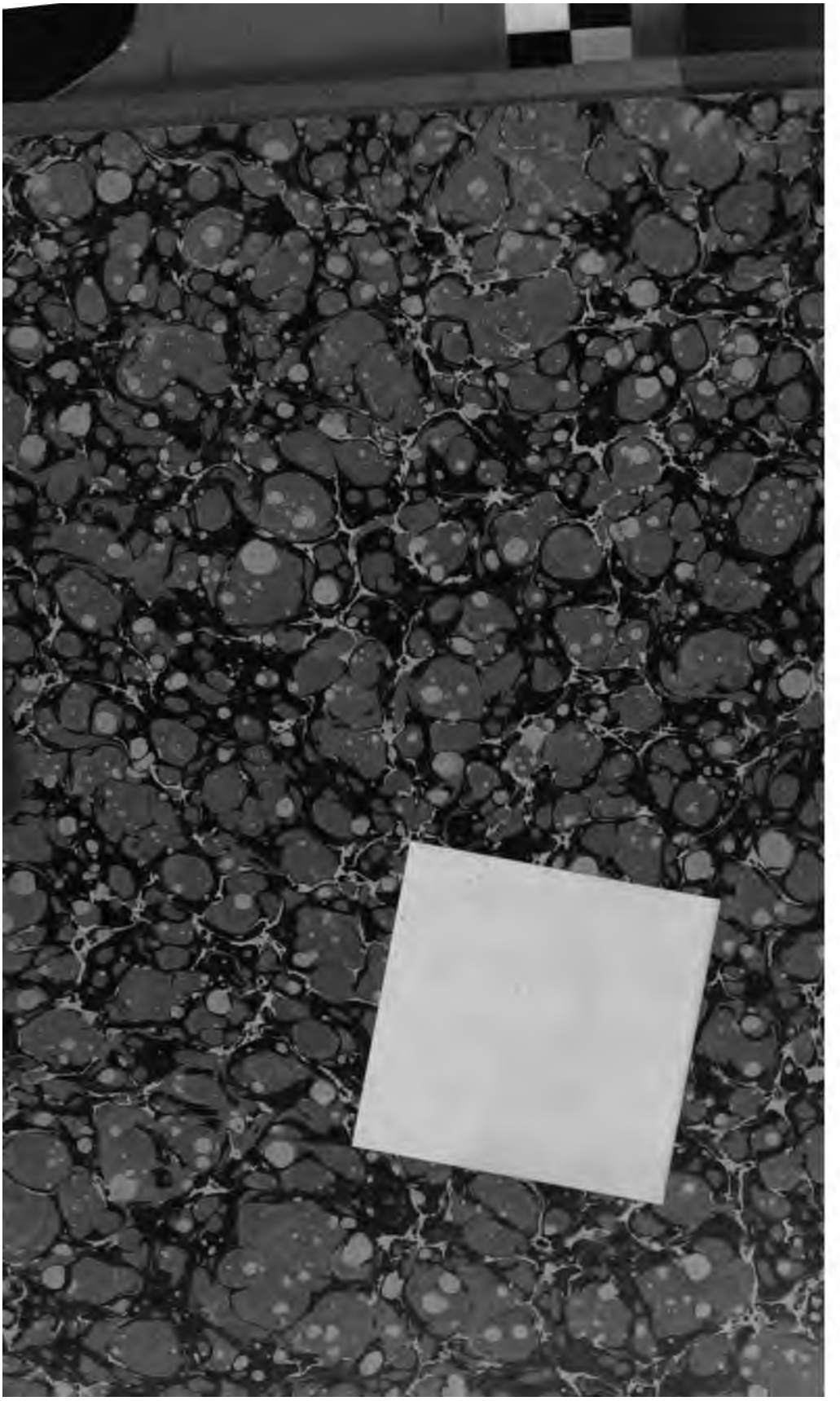
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

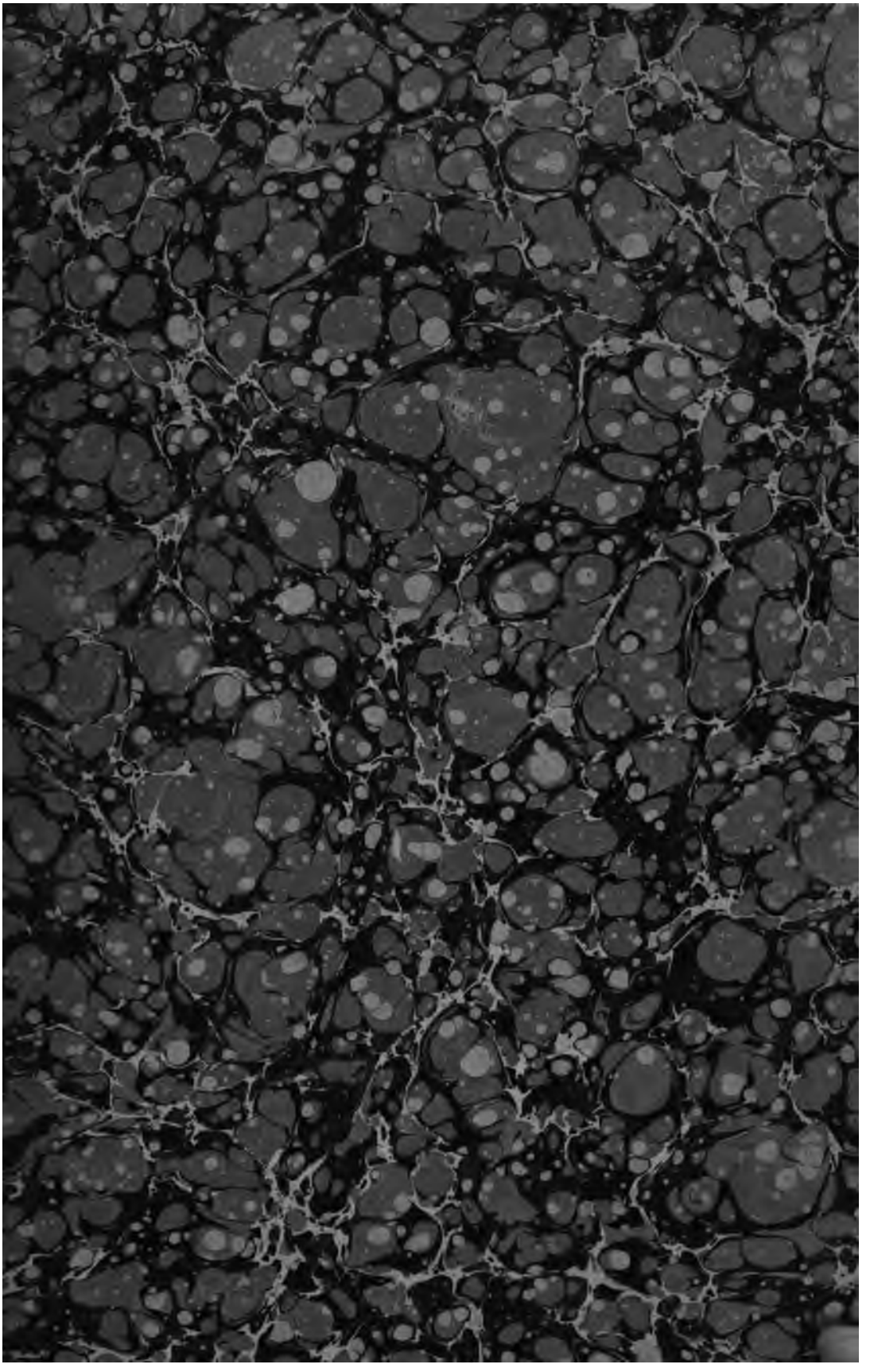
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





1006

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

40837 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-SIXIÈME. — ANNÉE 1908.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

A LA SORBONNE.

1908

119394

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1908 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.

Président.....	MM. PERRIN (Raoul).
Vice-Présidents.....	BIOCHE. BRICARD. GRÉVY. LÉVY (L.).
Secrétaires.....	RAFFY. SERVANT.
Vice-Secrétaires.....	ESTANAVE. FATOU.
Archiviste.....	FOUCHÉ.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE
Membres du Conseil (2)	ANDOYER, 1911. ANDRÉ (D.), 1911. BLUTEL, 1911. BOREL, 1909. FOURET, 1911. HADAMARD, 1910. KOENIGS, 1910. LAISANT, 1909. LECORNU, 1910. MAROTTE, 1909. D'OCAGNE, 1909. TRESSE, 1910.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date de l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).

1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (1).

1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5e).

1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.

1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6e).

1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7e).

1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.

1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Châteauroux (Indre).

1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).

1894. **BALITRAND**, ingénieur, à Métlaoui (Tunisie).

1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, à Verdun (Meuse).

1906. **BARTHELS**, professeur de mathématiques, à Aschaffenburg (Bavière).

1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Duquesne, 11, à Paris (7e).

1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.

1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue Pouchkinskaïa, 10, à Saint-Pétersbourg (Russie).

1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Brémontier, 29, à Paris (17e). S. P.

1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e). S. P.

1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à l'École technique supérieure, Rütscherstrasse, 37, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).

1891 **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).

1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes. S. P.

1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne).

1892. **BONAPARTE** (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).

1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris. S. P.

1896. **BOULANGER**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille.

1896. **BOURGET** (Henry), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

1896. **BOURLET**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14e). S. P.

1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris (18e).

1904. **BOUTROUX** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, chemin de la Gaillarde, à Montpellier.

1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6e).

1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14e).

1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs de Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.

1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 6, à Montpellier.

1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

---

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).

1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme.

1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et Cie, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16e). S. P.

1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17e).

1896. **CARTAN**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du faubourg Saint-Jean, 76, à Nancy.

1887. **CARVALLO**, docteur ès sciences, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5e). S. P.

1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).

1892. **CELLÉRIER** (Gustave), cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).

1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).

1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5e).

1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.

1907. **CHAZY**, agrégé de mathématiques, rond-point Bugeaud, 5, à Paris (16e).

1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).

1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille.

1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9e). S. P.

1890. **COLOT**, villa Sully, à Arcachon (Gironde).

1898. **COMBEBIAC**, capitaine du génie, docteur ès sciences, rue Coulon, 9, à Bourges.

1900. **COMTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).

1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.

1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10e).

1900. **COTTON** (Émile), professeur à l'Université de Grenoble. S. P.

1904. **CURTISS**, Sherman avenue, 1939, à Evanston (Illinois, États-Unis).

1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5e).

1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.

1901. **DELASSUS**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.

1905. **DENJOY**, agrégé de mathématiques, rond-point Bugeaud, 5, à Paris (16e).

1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kieff (Russie).

1899. **DELEMER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille.

1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).

1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau 10, à Gand (Belgique).

1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).

1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).

1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.

1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3o, à La Corogne (Espagne).

1899. **DRACH**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites, 68, à Poitiers.

1907. **DULAC**, professeur-adjoint à l'Université, rue Malakoff, 15, à Grenoble.

1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zürich (Suisse).

1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).

1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.

1897. **DURAN-LORIGA** (commandant), plaza de Maria Pita, 20, à la Corogne (Espagne).

Date de l'admission.

1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).

1902. **EGOROFF** (Dimitri), professeur à l'Université, Moltchanovka, maison Fryndine, à Moscou (Russie).

1903. **ESPANET**, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5e).

1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5e).

1907. **ETZEL**, St Bernard's Seminary, à Rochester (Etat de New-York, États-Unis).

1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).

1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier.

1906. **FARAGGI**, professeur au lycée de Constantine (Algérie).

1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14e).

1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.

1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, 72, route de Florissant, à Genève (Suisse).

1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).

1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.

1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).

1896. **FONTANEAU**, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges.

1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).

1903. **FORD** (Walter B.), Forest avenue, 617, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1889. **FOUCHE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).

1905. **FOUET** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, rue Férou, 11, à Paris (6e).

1872. **FOURET**, répétiteur et ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.

1903. **FRAISSÉ**, professeur au lycée, à Lille.

1892. **FROLOV** (le général), avenue des Vollandes, 2, à Genève (Suisse).

1903. **FUETER**, Seevogelstrasse, 7, à Bâle (Suisse).

1900. **GALDEANO** (Z.-S. de), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse (Espagne).

1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7e).

1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Medecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).

1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).

1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).

1872. **GENTY**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7e).

1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.

1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, via XX Settembre, 66, à Palerme (Italie).

1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).

1907, **GIORDANO**, professeur de mathématiques, Ginnasio Umberto I, à Ragusa (Sicile).

1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).

1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).

1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la Marine, 7, rue Laromiguière, à Paris (5e).

1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5e). S. P.

Date de l'admission.

1896. **GREENHILL**, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 *bis*, à Paris (7e)

1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).

1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue Madame, 30, à Paris (6e).

1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

1907. **GUICHARD**, rue Condorcet, 42, à Paris (9e).

1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).

1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14e).

1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 *bis*, à Paris (16e).

1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).

1896. **HADAMARD**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.

1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures, rue Jacob, 35, à Paris (6e).

1894. **HALSTED**, professeur au Kenyon College, à Gambier (Ohio, États-Unis). S. P.

1901. **HANCOCK** (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).

1900. **HARDEL**, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).

1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.

1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).

1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).

1893. **HIOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5e).

1879. **HOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Hövik, près Christiania (Norvège).

1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15e). S. P.

1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17e).

1907. **HUSSON**, maître de conférences à l'Université, rue de Châteaudun, 36, à Rennes.

1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).

1903. **ISSALY** (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.

1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5e).

1898. **JAHNKE** (Dr E.), professeur à l'Académie des Mines, Pariserstrasse, 36, à Berlin W15 (Allemagne).

1898. **JARRY** (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12e).

1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5e).

1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).

1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7e). S. P.

1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).

1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).

Date de l'admission.

1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14e).

1907. **KRYLOFF**, ingénieur des mines, hôtel Gerson, rue de la Sorbonne, 14, à Paris (5e).

1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue Brochant, 18, à Paris (17e).

1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16e).

1906. **LALESCO**, licencié ès sciences, rue d'Assas, 116, à Paris (6e).

1893. **LANCELIN**, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).

1899. **LANDAU** (Edmond), professeur à l'Université de Berlin, Hardenbergstrasse, 13, à Charlottenburg (Allemagne).

1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa Ensoleillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).

1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).

1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6e).

1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17e). S. P.

1896. **LEBEL**, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, 38, à Montpellier.

1902. **LEBESGUE**, docteur ès sciences, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Quatre-Roues, 1, à Poitiers.

1903. **LEBEUF**, directeur de l'observatoire de Besançon.

1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).

1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).

1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, villa Kérahu, aux Bordes, par Montereau (Seine-et-Marne).

1904. **LEMOYNE** (T.), rue Ernest-Renan, 21, à Paris (15e).

1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liége (Belgique).

1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.

1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6e).

1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).

1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).

1907. **LESGOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, avenue de l'Observatoire, 16, à Paris (6e).

1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6e).

1872. **LEVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16e).

1907. **LÉVY** (Paul), élève ingénieur des Mines, rue du Regard, 12, à Paris (6e).

1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).

1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajan, 15, à Helsingfors (Finlande).

1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).

1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4e).

1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16e).

1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, ingénieur des manufactures de l'État, quai d'Orsay, 63, à Paris (7e).

Date de l'admission.

1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris.

1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5e).

1895. **MAILLET**, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.

1905. **MALUSKI**, professeur au lycée Hoche, rue Gabriel, 12, à Versailles.

1905. **MANTELL** (Mlle L.), rue Dutot, 30, à Paris (15e).

1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue Toullier, 7, à Paris (5e).

1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).

1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).

1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, avenue des Arts, 43, à Gand (Belgique).

1894. **MAUPIN**, professeur au lycée, rue de l'Église St-Ausone, 33, à Angoulême (Charente).

1897. **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).

1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.

1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7e). S. P.

1902. **MERLIN** (Émile), docteur en sciences, rue de la Poste, 22, à Uccle (Belgique).

1907. **MERLIN** (Jean), astronome à l'observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).

1902. **MESNY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).

1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).

1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).

1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).

1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.

1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), docteur ès sciences, rue de la Dalbade, 35, à Toulouse.

1907. **MONTEL**, professeur au lycée Buffon, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (14e).

1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 8, à Lille (Nord).

1903. **MULLER** (J.-O.), Nikolausbergerweg, 49, à Göttingen (Allemagne).

1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).

1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).

1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).

1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).

1907. **NIKITINE**, rue Flatters, 7, à Paris (5e).

1882. **OCAGNE** (M. D'), professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.

1905. **OUIVET**, professeur au lycée, à Dijon.

1873. **OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).

1901. **PADÉ** (H.), doyen de la Faculté des Sciences, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.

1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6e).

1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).

Date de l'admission.

1884. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, à Toulouse.

1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.

1874. **PERCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16e).

1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.

1873. **PERRIN** (R.), inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris (7e). S. P.

1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17e).

1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).

1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur-adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, rue Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Tarassovskaïa, 20, à Kiew (Russie),

1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'Ecole Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5e). S. P.

1894. **POTRON**, docteur ès sciences, rue Saint-Honoré, 368, à Paris (9e).

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.

1906. **POPOVICI**, licencié ès sciences, rue Monge, 29, à Paris (5e).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1898. **RABUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles.

1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5e). S. P.

1903. **REMOUNDOS**, professeur de mathématiques, rue Soultani, 17, à Athènes (Grèce).

1906. **REMY**, ingénieur des mines, à Alais (Gard).

1900. **RENARD**, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16e).

1903. **RICHARD**, professeur au lycée, place du Rosoir, 1, à Dijon.

1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8e).

1872. **ROUCHÉ**, membre de l'Institut, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7e).

1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).

1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard Raspail, 206, à Paris (14e).

1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.

1907. **SANIELEVICI**, licencié ès sciences, rue Monge, 46, à Paris (5e).

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

Date de l'admission.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

1907. **SCHÖNFLIES**, professeur à l'Université, Kurfürstenstrasse, 12, à Mittelhufen, près Königsberg (Prusse).

1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).

1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).

1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).

1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7e).

1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg (Russie). S. P.

1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7e).

1900. **SPARRE** (comte Magnus DE), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon. S. P.

1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).

1901. **STETSON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).

1898. **STÖRMER** (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).

1903. **SUCHAR**, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (9e).

1904. **SUDRIA**, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15e).

1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).

1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien. 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.

1896. **TANNENBERG** (DE), docteur ès sciences, rue d'Assas, 118, à Paris (6e).

1875. **TANNERY**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e).

1882. **TARRY** (Gaston), boulevard Pereire, 177, à Paris (17e). S. P.

1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard St-Germain, 11, à Paris (5e).

1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur à l'École navale, à Brest (Finistère).

1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).

1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17e).

1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).

1896. **TRESSE**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Mizon, 6, à Paris (14e).

1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).

1893. **VALLÉE-POUSSIN** (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue Léopold, 38, à Louvain (Belgique).

1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.

1905. **VAN VLECK**, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, Etats-Unis).

1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Socrate, 11 A, à Athènes (Grèce).

1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).

1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.

1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 17, à Rome.

1904. **VORONOÏ**, professeur à l'Université, rue Vilcza, 18, à Varsovie (Russie).

1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).

1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).

Date de l'admission.

1907. **WEBER** (Emile), rue du Mambour, 10, à Liége (Belgique).

1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8e).

1906. **WILSON**, Lee Street, 16, à Cambridge (Massachusetts, États-Unis).

1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8e).

1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Academie d'Artillerie rue Znamenkaia, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).

1890. **ZAREMBA**, professeur à l'Université, rue Biskupia, 5, à Cracovie (Autriche).

1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Marie, 5 B, à Athènes (Grèce).

1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, Sanct-Kanutkestrœde, 11, à Copenhague (Danemark).

1898. **ZIWET**, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

Membres décédés en 1907 : M. l'abbé **RIVEREAU**; M. **RODA**; M. **TISSOT**.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	PICARD.
1897	KŒNIGS.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (RAOUL).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin..... ...	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge	*Annals of Mathematics.*	Massachusetts.
Christiania.....	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.....	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague.....	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N^lle^-Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye.....	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Pays-Bas.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig.....	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.

Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rennes	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Saint-Pétersbourg	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	*Acta Mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 23 OCTOBRE 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. André : *Sur les inversions élémentaires.*

M. Raffy : *Sur l'isothermie relative des réseaux.*

M. Bioche : *Remarques sur les courbes gauches du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 13 NOVEMBRE 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Husson, présenté par MM. Le Roux et Lebesgue; M. Boitel de Dienval, présenté par MM. Raffy et Servant; MM. Henri Tripier et Sanielevici, présentés par MM. Raffy et Estanave; M. Th. Got, présenté par MM. Bioche et Lalesco; M. Paul Lévy, présenté par MM. Blutel et Lucien Lévy.

Communications :

M. Lalesco : *Sur l'ordre et les zéros de la fonction* $D(\lambda)$ *de Fredholm.*

M. Hadamard présente quelques observations sur le même sujet.

SÉANCE DU 27 NOVEMBRE 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Giordano (Domenico), présenté par MM. Bricard et Bourlet.

Communications :

M. Bricard : *Sur la construction d'un cercle tangent à trois cercles.*

M. Lalesco : *Sur la fonction* $D(\lambda)$ *de Fredholm.*

M. Gérardin : *Sur une décomposition en somme de carrés.*

SÉANCE DU 11 DÉCEMBRE 1907.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Lalesco : *Sur l'équation de M. Volterra et sur les équations différentielles linéaires d'ordre fini et d'ordre infini.*

M. Bioche : *Sur les points doubles apparents des courbes gauches algébriques.*

M. Raffy : *Sur une propriété de l'élément linéaire de la sphère et sa généralisation.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1907.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Popovici : *Sur les transformations d'une congruence de courbes.*

M. Sanielevici : *Sur l'application des équations intégrales aux équations différentielles du second ordre.*

M. Lalesco : *Sur l'équation différentielle linéaire d'ordre infini qui admet comme solutions des polynomes de tous les degrés.*

SÉANCE DU 8 JANVIER 1908.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil d'administration. Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances.

Communication :

M. Raffy : *Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont égaux et de même sens.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA MÉTHODE DE M. GOURSAT POUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. La solution de l'équation de Fredholm dépend d'expressions analytiques assez compliquées. Dans son Mémoire des *Acta mathematica* (1), M. Fredholm a montré comment l'on pouvait vérifier que ces expressions fournissaient bien la solution cherchée, mais il n'a pas indiqué comment on était amené à la considération de ces expressions.

M. Goursat (2) a montré récemment que l'étude d'un cas particulier conduisait facilement à prévoir la forme de la solution; il

---

(1) *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903).

(2) *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXV, fasc. III, 1907).

devient alors tout naturel d'employer le procédé de vérification de M. Fredholm. D'ailleurs cette vérification est inutile dans des cas étendus, comme il résulte d'un raisonnement rapidement indiqué par M. Goursat à la fin de sa Note. C'est ce raisonnement que je vais développer; il conduit à une conclusion très générale: cela m'a paru intéressant à noter, d'autant que la méthode de M. Goursat semble pouvoir s'appliquer à d'autres équations fonctionnelles.

Pour être clair, je reprends d'abord l'étude du cas particulier considéré par M. Goursat; cela me permet de fixer les notations et d'indiquer des transformations de déterminants à peine différentes de celles qu'effectue M. Goursat, mais un peu plus simples [1].

2. $K(x, y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données, $\varphi(x)$ étant la fonction inconnue, l'équation de Fredholm s'écrit

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \psi(x).$$

Examinons d'abord le cas où le noyau $K(x, y)$ est de la forme

$$(2) \quad K(x, y) = X_1(x)\,Y_1(y) + X_2(x)\,Y_2(y) + \ldots + X_n(x)\,Y_n(y).$$

En remplaçant K par cette valeur dans le premier membre de l'équation (1), on voit que l'intégrale qui y figure est une fonction linéaire des $X_i(x)$; donc on trouve

$$(3) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - H_1 X_1(x) - H_2 X_2(x) - \ldots - H_n X_n(x),$$

les H_i étant des constantes à déterminer.

Modifions l'équation (1) à l'aide de (2) et de (3); le même fait se reproduit, mais cette fois $\psi(x)$ disparaît dans les deux membres. On trouve alors qu'une combinaison linéaire et homogène des X_i est nulle. Mais on peut supposer les X_i linéairement indépendantes; donc on doit annuler les coefficients des X_i, d'où,

---

[1] Je n'ai fait qu'indiquer les premiers calculs faciles à rétablir et qu'on trouvera dans la Note de M. Goursat.

pour déterminer les H_i, n équations linéaires de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\int_0^1 X_1(s)\,Y_i(s)\,ds\,H_1+\ldots+\lambda\int_0^1 X_{i-1}(s)\,Y_i(s)\,ds\,H_{i-1}\\ &+\left[1+\lambda\int_0^1 X_i(s)\,Y_i(s)\,ds\right]H_i+\lambda\int_0^1 X_{i+1}(s)\,Y_i(s)\,ds\,H_{i+1}+\ldots\\ &+\lambda\int_0^1 X_n(s)\,Y_i(s)\,ds\,H_n=\lambda\int_0^1 \psi(s)\,Y_i(s)\,ds. \end{aligned}\right.$$

Posons $\varphi(x)=\psi(x)-\rho(x)$; nous avons

$$(5)\qquad X_1(x)\,H_1+X_2(x)\,H_2+\ldots+X_n(x)\,H_n=\rho(x).$$

En supposant que le déterminant des équations (4) soit différent de zéro, l'équation en ρ, obtenue en égalant à zéro le déterminant total de (4) et (5), fournira la solution du problème. Mais, sous cette forme, la solution est donnée en fonction des X_i et Y_i, lesquelles ne sont pas entièrement déterminées quand K est donné; cherchons à éviter le calcul des X_i et Y_i en transformant l'équation en ρ.

Le premier membre de cette équation est un déterminant dont tous les termes peuvent être considérés comme des intégrales définies prises de 0 à 1; on peut faire sortir les signes d'intégration correspondants du symbole du déterminant, pourvu qu'on remplace la variable s par des variables différentes dans chaque terme ou simplement dans chaque ligne. Ainsi l'équation peut s'écrire

$$(6)\quad \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} \rho^0 & X_1^0 & X_2^0 & \ldots & X_n^0\\ \lambda\psi^1 Y_1^1 & 1+\lambda X_1^1 Y_1^1 & \lambda X_2^1 Y_1^1 & \ldots & \lambda X_n^1 Y_1^1\\ \lambda\psi^2 Y_2^2 & \lambda X_1^2 Y_2^2 & 1+\lambda X_2^2 Y_2^2 & \ldots & \lambda X_n^2 Y_2^2\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \lambda\psi^n Y_n^n & \lambda X_1^n Y_n^n & \lambda X_2^n Y_n^n & \ldots & 1+\lambda X_n^n Y_n^n \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_n=0,$$

en mettant pour simplifier X_i^j, Y_i^j, ψ^j, ρ^0, X_i^0, au lieu de $X_i(x_j)$, $Y_i(x_j)$, $\psi(x_j)$, $\rho(x)$, $X_i(x)$. On voit qu'il n'y a aucune relation entre les indices supérieurs et les indices inférieurs; on pourrait effectuer sur les indices supérieurs 1, 2, ..., n une permutation quelconque sans que l'équation (6) soit modifiée. D'une façon générale, deux termes seront dits *équivalents* si l'on passe de l'un à l'autre par une telle permutation; deux termes équivalents,

soumis à l'intégration n-uple qui figure dans (6), donnent le même résultat. Remarquons encore que l'intégration par rapport à dx_i peut être supprimée quand il s'agit d'un terme ne contenant pas x_i.

Ceci posé, la difficulté qu'on éprouve à faire apparaître la fonction K dans le déterminant A qui figure dans l'équation (6) provient surtout de la présence de produits $X_i Y_j$ à indices inférieurs différents; mais le déterminant A est égal au déterminant B :

$$B = \begin{vmatrix} \rho^0 & \lambda X_1^0 Y_1^1 & \lambda X_2^0 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^0 Y_n^n \\ \psi^1 & 1+\lambda X_1^1 Y_1^1 & \lambda X_2^1 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^1 Y_n^n \\ \psi^2 & \lambda X_1^2 Y_1^1 & 1+\lambda X_2^2 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^2 Y_n^n \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \psi^n & \lambda X_1^n Y_1^1 & \lambda X_2^n Y_2^2 & \dots & 1+\lambda X_n^n Y_n^n \end{vmatrix}.$$

Cela serait tout à fait évident si les éléments principaux étaient nuls; le cas général se ramène à celui-là, pourvu qu'on utilise le développement donné par la formule

$$\Delta = D + \sum_i a_i^i D_i + \sum_{i,j} a_i^i a_j^j D_{i,j} + \dots,$$

dans laquelle Δ est le déterminant des a_i^k, D celui qu'on déduit de Δ en remplaçant les éléments principaux a_i^i par des zéros, $D_{i,j,\dots}$ le mineur de D obtenu en barrant les lignes et les colonnes de rangs $i, j, \dots$.

Or le déterminant B, ainsi que tous ses équivalents, se retrouve évidemment dans le développement de C :

$$C = \begin{vmatrix} \rho^0 & \lambda K^{0,1} & \lambda K^{0,2} & \dots & \lambda K^{0,n} \\ \psi^1 & 1+\lambda K^{1,1} & \lambda K^{1,2} & \dots & \lambda K^{1,n} \\ \psi^2 & \lambda K^{2,1} & 1+\lambda K^{2,2} & \dots & \lambda K^{2,n} \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \psi^n & \lambda K^{n,1} & \lambda K^{n,2} & \dots & 1+\lambda K^{n,n} \end{vmatrix},$$

dans lequel les indices supérieurs désignent les variables; comparons donc B et C. Nous considérerons les éléments des n dernières colonnes de ces déterminants comme des sommes, et nous remplacerons B et C par des sommes de déterminants.

Les éléments de B seront remplacés par les sommes

$$0 + \lambda X_1^0 Y_1^1, \quad 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1, \quad \dots;$$

ceux de C seront remplacés d'une part, et cela donnera le développement C′, par les sommes

$$0 + \lambda K^{0,1}, \quad 1 + \lambda K^{1,1}, \quad \ldots,$$

et d'autre part, ce qui donnera le développement C″, par

$$0 + \lambda X_1^0 Y_1^1 + \ldots + \lambda X_n^0 Y_n^1, \qquad 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1 + \ldots + \lambda X_n^1 Y_n^1, \qquad \ldots.$$

Quand, pour la formation d'un déterminant partiel, une colonne aura été remplacée par la première file de ses éléments, laquelle est constituée de n zéros et d'un chiffre 1, on pourra barrer cette colonne et la ligne de même rang. En opérant ainsi, le coefficient de λ^p se présente sous la forme d'une somme de déterminants d'ordre $p+1$.

Dans C′, ces déterminants sont en nombre égal à celui des combinaisons de n lettres p à p, et ils sont évidemment tous équivalents; le terme en λ^p est donc équivalent à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\alpha_p\lambda^p,$$

$$\alpha_p = \begin{vmatrix} \rho^0 & K^{0,1} & K^{0,2} & \ldots & K^{0,p} \\ \psi^2 & K^{1,1} & K^{1,2} & \ldots & K^{1,p} \\ \psi^2 & K^{2,1} & K^{2,2} & \ldots & K^{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi^p & K^{p,1} & K^{p,2} & \ldots & K^{p,p} \end{vmatrix}.$$

Dans C″, ceux de ces déterminants qui ne sont pas nuls proviennent de files d'éléments contenant des $X_i Y_i$ à indices inférieurs variables d'une file à l'autre. Ces déterminants sont évidemment équivalents à ceux qu'on rencontre dans B; d'ailleurs, chaque déterminant provenant de B donne dans C″ autant de déterminants équivalents qu'il y a d'arrangements de n lettres p à p; le coefficient de λ^p dans B est donc équivalent à $\frac{\alpha_p}{p!}$. La question que nous nous étions posée est résolue.

Pour arriver à la forme de M. Fredholm, il va suffire de développer α_p suivant les éléments de sa première colonne. Désignons, avec M. Fredholm, par $K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_p \end{pmatrix}$ le déterminant ayant pour élément situé dans sa $i^{\text{ième}}$ colonne et sa $j^{\text{ième}}$ ligne le nombre

$K(a_i, b_j)$, et remarquons qu'une permutation effectuée sur l'une ou l'autre des deux lignes de variables de ce nouveau symbole correspond tout simplement à une permutation des lignes ou des colonnes du déterminant correspondant. On a :

$$\begin{aligned}\alpha_p = \rho K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} &- \psi^1 K\begin{pmatrix} x, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} \\ + \psi^2 K\begin{pmatrix} x, x_1, x_3, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p \end{pmatrix} &- \ldots = \rho K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} \\ - \psi^1 K\begin{pmatrix} x, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} &- \psi^2 K\begin{pmatrix} x, x_1, x_3, \ldots, x_p \\ x_2, x_1, x_3, \ldots, x_p \end{pmatrix} - \ldots,\end{aligned}$$

et, sous cette nouvelle forme, il est évident que tous les termes autres que le premier sont équivalents. Si donc on pose

$$(7) \quad \mathfrak{D}(\lambda) = 1 + \sum \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

$$(8) \quad \mathfrak{J}(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \sum \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ y, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

et si $\mathfrak{D}(\lambda)$ est différent de zéro, l'équation (1) admet la solution donnée par la formule

$$(9) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s)\, \mathfrak{J}(x, s; \lambda)\, ds.$$

Jusqu'ici les symboles $\sum$ désignent des suites finies, mais on peut les considérer comme représentant des séries, car les symboles $K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_q \\ \alpha, a_2, \ldots, a_q \end{pmatrix}$, à plus de $2n$ variables, sont identiquement nuls, ce qui résulte immédiatement d'un calcul analogue à celui qui nous a donné C''.

3. Pour étendre le résultat précédent à des cas où le noyau n'est pas de la forme (2), je reprends le raisonnement qui termine la Note de M. Goursat.

Dans l'équation (1), les données sont le noyau K et le second membre ψ. Considérons une équation de Fredholm dans laquelle les données K_n et ψ_n sont variables avec n et supposons qu'elle

admette la solution φ_n, de sorte que l'on a

$$(10) \qquad \varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds = \psi_n(x).$$

Supposons de plus que K_n, ψ_n, φ_n soient des fonctions sommables, bornées, tendant uniformément vers des limites K, ψ, φ, lesquelles sont par suite bornées et sommables. Alors $K_n \varphi_n$ tend uniformément vers $K\varphi$ et, d'après le théorème classique sur l'intégration des suites uniformément convergentes, chaque terme de l'équation (10) tend vers le terme correspondant de (1) et φ est solution de l'équation (1). Ce qu'on peut résumer, d'une façon un peu imprécise, en disant que *la limite d'une solution d'une équation de Fredholm à données variables est une solution de l'équation correspondant aux données limites.*

4. Remarquons maintenant que les formules (7) et (8) conservent un sens tant que le noyau est borné. Si, en effet, on a toujours $|K(x, y)| < M$, les symboles K à $2p$ variables sont des déterminants d'ordre p dont les termes ne surpassent pas M en valeur absolue. D'après un théorème de M. Hadamard [1], un tel déterminant ne surpasse pas $M^p \sqrt{p^p}$; donc les séries (7) et (8) ont leurs termes respectivement inférieurs, en valeur absolue, à ceux des séries

$$d = 1 + \sum_1^\infty (\lambda M)^p \frac{\sqrt{p^p}}{p!}, \qquad f = \lambda M + \sum_1^\infty (\lambda M)^{p+1} \frac{\sqrt{(p+1)^{p+1}}}{p!};$$

ces séries convergent quel que soit λ; les formules (7) et (8) conservent donc un sens et, par suite, aussi la formule (9), pourvu que $\mathfrak{D}(\lambda)$ diffère de zéro.

Si ψ est en module inférieur à N, la série fN est majorante pour la série représentant $\mathcal{E}(\lambda) = \int_0^1 \psi(s)\, \mathcal{F}(x, s; \lambda)\, ds$.

Ceci posé, soient K_n et ψ_n des fonctions sommables tendant uniformément vers les fonctions K et ψ que nous supposons sommables et bornées. Alors, si $|K| < M$, $|\psi| < N$, on a aussi, quand

---

[1] Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893).

n est assez grand, $|K_n| < M$, $|\psi_n| < N$, et les séries d et fN sont majorantes pour les séries représentant les fonctions $\mathfrak{D}_n(\lambda)$, $\mathcal{E}_n(\lambda)$, $\mathfrak{D}(\lambda)$, $\mathcal{E}(\lambda)$ attachées aux données K_n, ψ_n, K, ψ.

Il en résulte que, si q est assez grand, on commettra une erreur uniformément inférieure au nombre positif ε arbitrairement choisi en limitant ces séries à leurs q premiers termes, et, par suite, la convergence de $\mathfrak{D}_n$ vers $\mathfrak{D}$ et de $\mathcal{E}_n$ vers $\mathcal{E}$ résultera de la convergence de chaque terme des séries $\mathfrak{D}_n$ et $\mathcal{E}_n$ vers le terme correspondant de $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{E}$. Or, par exemple, le coefficient de $\frac{\lambda^p}{p!}$ dans $\mathcal{E}_n$ est l'intégrale

$$(11) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi_n(s)\, K_n\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} \\ s, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} \end{pmatrix} ds\, dx_1 \ldots dx_{p-1}.$$

Il est évident que $\psi_n(s)\, K_n\begin{pmatrix} x, \ldots \\ s, \ldots \end{pmatrix}$ tend uniformément vers $\psi(s)\, K\begin{pmatrix} x, \ldots \\ s, \ldots \end{pmatrix}$; en appliquant encore le théorème sur l'intégration des suites uniformément convergentes, on voit que le coefficient de λ^p dans $\mathcal{E}_n$ tend vers le coefficient de λ^p dans $\mathcal{E}$.

Si donc on suppose $\mathfrak{D}(\lambda) \neq 0$, il en sera de même de $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ pour n assez grand; la formule (9) fait alors correspondre à K_n et ψ_n et à K et ψ des fonctions $\Phi_n(x)$, $\Phi(x)$; Φ_n tend vers Φ. Ce qu'on peut résumer en disant que *la formule* (9) *définit une fonction qui varie d'une façon continue avec les données.*

5. Pour légitimer la formule (9) comme formule donnant une solution de (1), il va suffire maintenant de se placer dans des cas tels qu'on puisse confondre les fonctions φ_n et Φ_n des deux paragraphes précédents.

Supposons que $K(x, y)$ soit continue en (x, y). Alors on prendra pour K_n un polygone en x, y et, en supposant ψ bornée, on prendra $\psi_n = \psi$. Alors Φ_n est un polynome qui satisfait à l'équation de Fredholm de données K_n, ψ_n, pourvu que $\mathfrak{D}_n$ diffère de zéro. Mais il en est ainsi pour n assez grand si l'on suppose $\mathfrak{D}(\lambda) \neq 0$, et alors les Φ_n sont uniformément bornés dans leur ensemble. Par suite, Φ, qui est leur limite, étant sommable et bornée, est, d'après le paragraphe 3, solution de l'équation (1).

Ainsi, la formule (9) fournit une solution de l'équation (1)

quand le noyau est continu et quand le second membre est sommable et borné.

6. Le raisonnement précédent est celui de M. Goursat [1]. Examinons le rôle qu'y joue l'hypothèse de la convergence *uniforme* de φ_n vers φ, de K_n vers K, de ψ_n vers ψ.

Cette hypothèse a permis, dans les paragraphes 3 et 4, l'interversion des symboles de limite et d'intégration appliqués aux termes de suites uniformément convergentes; mais cette interversion est évidemment légitime dans des cas plus étendus. On sait, par exemple, que cela est légitime sous la seule hypothèse que l'ensemble des termes de la suite soit borné [2]. Les conclusions des paragraphes 3 et 4 subsistent donc, pourvu que les fonctions $\varphi_n(x)$, $K_n(x, y)$, $\psi(x)$ soient bornées dans leur ensemble (quels que soient x, y, n) et tendent vers φ, K, ψ.

Supposons donc $K(x, y)$ borné et limite d'une suite convergente de polynomes en (x, y), qu'on peut, on le sait, supposer bornés dans leur ensemble et qui joueront le rôle des K_n; si, de plus, ψ est bornée, on prendra $\psi_n = \psi$, et la conclusion du paragraphe précédent s'étend à tout noyau de première classe; quant à la solution Φ obtenue, c'est une fonction sommable puisque $\Phi - \psi$ est la limite des polynomes $\Phi_n - \psi$.

Si maintenant, ψ étant toujours bornée, K est borné et de seconde classe, on pourra considérer K comme la limite d'une suite *uniformément bornée* de fonctions K_n de classe 1 [3]; donc la formule (9) s'applique encore à ce cas. On voit, de plus, que $\Phi - \psi$ est de classe 2 au plus. En continuant ainsi on voit que *la formule* (9) *fournit une solution de l'équation* (1), *quand* $\mathfrak{D}(\lambda)$ *diffère de zéro, pourvu que le noyau soit :* 1° *borné;* 2° *représentable analytiquement et que* 3° *le second membre soit sommable et borné.*

---

(1) Après avoir donné le bon à tirer de sa Note, M. Goursat avait remarqué que sa méthode, qu'il n'avait tout d'abord employée que pour un noyau donné par une série $\Sigma X_i Y_i$ uniformément convergente, s'appliquait à l'étude du cas où le noyau est continu quelconque.

(2) *Voir* mes *Leçons sur l'intégration*, p. 114.

(3) *Voir*, par exemple, mon Mémoire sur les fonctions représentables analytiquement (*Journal de M. Jordan*, 1905).

7. Dans l'énoncé précédent, j'ai mis en évidence trois hypothèses restrictives; il n'y a guère d'intérêt à chercher à s'affranchir de la seconde [1]; je m'occuperai seulement des deux autres.

Pour cela, j'aurai à me servir d'intégrales portant sur des fonctions non bornées. Pour les définitions et les propriétés de ces intégrales, je renvoie à ma Thèse et à mes *Leçons sur l'intégration*. Pour ce qui est de la possibilité de calculer une intégrale multiple à l'aide d'intégrales simples successives, on trouvera quelques indications dans ma Thèse; il est facile de compléter ces indications autant que cela est utile pour la suite [2]. Je rappelle seulement ici, que si f a une intégrale, $|f|$ en a aussi une.

Le théorème sur l'intégration des suites, qui a servi précédemment, sera remplacé par le suivant, dont il n'est qu'un cas particulier : *Une suite convergente de fonctions sommables f_i est intégrable terme à terme lorsqu'il existe une fonction sommable* F, *telle que l'on ait, quels que soient i et les variables,* $|f_i| \leqq |F|$.

En effet, si f est la limite des f_i, on a $|f| \leqq |F|$; donc f est sommable, et, par suite, la relation

$$|r_i| = |f - f_i| \leqq 2|F| = |R|$$

---

[1] Voici cependant comment on pourrait opérer pour étudier le cas où le noyau $K(x, y)$ est sommable en tant que fonction de x seul ou de y seul, mais où l'on ne suppose pas K représentable analytiquement.

Dans ces hypothèses l'équation (1) et la formule (9) conservent un sens (K et ψ étant toujours supposés bornés) et, en substituant dans ces deux formules (1) et (9) à K la fonction K_1 qui va être définie, on n'apporte aucune modification. Pour $x \neq y$ on prendra

$$K_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y K(x, y)\, dy,$$

là où cette dérivée existe, et $K_1 = 0$ quand la dérivée n'existe pas. Pour $x = y$ on prendra $K_1 = 0$.

Ceci posé, remarquons qu'un polynome en y dont les coefficients sont des fonctions sommables de x est de la forme (2) sans cependant être nécessairement représentable analytiquement; raisonnant à partir de ces polynomes en y comme à partir des polynomes en (x, y), on arrivera à légitimer la formule (9) pour les fonctions $K(x, y)$, qu'on peut appeler *fonctions exprimables analytiquement* en tant que fonctions de y. $K_1(x, y)$ rentre dans cette catégorie de fonctions.

[2] La légitimité de ce procédé de calcul est d'ailleurs justifiée d'une autre manière dans une Note de M. Fubini [*Sugli integrali multipli* (*Rendic. della R. Accademia dei Lincei*, 1er semestre 1907)].

montre que les r_i satisfont à une inégalité analogue à celle que vérifient les f_i et réciproquement.

Or le domaine, ou l'ensemble mesurable auquel est étendue l'intégration considérée, peut toujours être considéré comme la somme de deux ensembles mesurables E et e tels que, dans E, R soit borné et que, étendue à e, l'intégrale de $|R|$, donc aussi celle de r_i, soit inférieure à ε. Le théorème énoncé est exact quand l'intégration n'est étendue qu'à E, puisque alors les restes sont bornés; comme ε est quelconque il est vrai aussi quand l'intégration est étendue $E + e$ [1].

8. Pour examiner les cas où ψ ne serait pas bornée, faisons la substitution $\varphi = \psi - \rho$ dans l'équation (1); on trouve

$$(12) \qquad \rho(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)\,\rho(s)\,ds = \lambda \int_0^1 K(x, s)\,\psi(s)\,ds.$$

Cette transformation suppose que le second membre ait un sens, ce que nous admettons car ce second membre est le premier terme de $\mathcal{C}(\lambda)$ et nous recherchons dans quel cas la formule (9) définit une solution de (1).

Le cas qui doit être considéré comme le plus simple, après celui où ψ est bornée, est celui où le second membre, en tant que fonction de x, est borné; c'est, par exemple, ce qui arrive si, ψ étant sommable, K est borné.

Je me bornerai à l'étude du cas où le second membre de (12) est borné, en faisant seulement remarquer qu'on pourrait, dans les

---

[1] Un autre théorème sur l'intégration des suites aurait pu être utilement employé ici, c'est celui qu'a fait connaître M. Riesz dans des recherches sur l'équation de Fredholm (*Comptes rendus*, 18 mars, 8 avril 1907).

M. Riesz annonce là des résultats très généraux relatifs au problème qui va nous occuper, résultats que M. Fischer a obtenus de son côté (*Comptes rendus*, 13 et 27 mai 1907) et qui résultent de l'emploi des méthodes de MM. Hilbert et Schmidt. Bien que je n'épuise pas la puissance de la méthode de M. Goursat, j'étudie dans le texte des cas dont le degré de généralité est à peu près comparable à celui des cas étudiés par M. Riesz.

M. Riesz annonce aussi quelques propriétés de la fonction φ, solution de l'équation de Fredholm. A ce sujet, je fais observer que la méthode utilisée ici met particulièrement en évidence la proposition suivante, d'ailleurs à peu près évidente : *si* $K(x, y)$ *est de classe* α, *la fonction* $\rho(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ *est au plus de classe* α.

autres cas, essayer ce que donnerait l'application à l'équation (12) d'une transformation analogue à celle qui permet de passer de (1) à (12).

Si nous appliquons la formule (9) à la solution de l'équation (12) on trouve

$$\rho(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\psi(s)\,ds - \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \int_0^1 K(\sigma, s)\psi(s)\,\mathfrak{F}(x, \sigma; \lambda)\,ds\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \left[\lambda K(x, s)\,\mathfrak{D}(\lambda) - \lambda \int_0^1 K(\sigma, s)\,\mathfrak{F}(x, \sigma; \lambda)\,d\sigma \right] ds.$$

Le coefficient de $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$ dans la quantité entre crochets est

$$\beta_p = K(x, s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_p \\ x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p$$

$$- p \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(\sigma, s)\, K\begin{pmatrix} x, & x_1, & \ldots, & x_{p-1} \\ \sigma, & x_1, & \ldots, & x_{p-1} \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_{p-1}\, d\sigma.$$

Or, en développant le déterminant

$$K\begin{pmatrix} x, & x_1, & \ldots, & x_p \\ s, & x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}$$

d'après les éléments de sa première ligne, on voit, à l'aide d'un calcul analogue à celui qui a été effectué sur α_p, que le coefficient de $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$ dans $\mathfrak{F}(x, s; \lambda)$ est égal à β_p. Donc, si la formule (9) fournit une solution de l'équation (12), on pourra aussi l'employer pour avoir une solution de l'équation (1).

Ainsi, le cas où $\int_0^1 \psi(s)\,K(x, s)\,ds$ est borné, ainsi que celui où

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x, s_1)\,K(s_1, s_2) \ldots K(s_{p-1}, s_p)\,\psi(s_p)\,ds_1\,ds_2 \ldots ds_p$$

est borné, se ramène au cas où ψ est bornée.

9. Supposons que l'on ait

$$|\psi| < N, \qquad \int_0^1 K^2(s, s)\,ds < M^2, \qquad \int_0^1 K^2(x, s)\,ds < M^2,$$

$$\int_0^1 K^2(x, s)\,K^2(s, y)\,ds < M^4,$$

et recherchons si les séries représentant $\mathfrak{D}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ ont un sens. Le coefficient de $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$ dans la seconde, par exemple, s'obtient par l'intégration de

$$\psi(s)\,\mathrm{K}\begin{pmatrix} x, & x_1, & \ldots, & x_p \\ s, & x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}.$$

Or, ce déterminant K est au plus égal, d'après le théorème de M. Hadamard, à

$$\mathrm{P} = \sqrt{\begin{aligned}&[\mathrm{K}^2(x, s) + \mathrm{K}^2(x_1, s) + \ldots + \mathrm{K}^2(x_p, s)] \\ &\times \prod_{i=1}^{i=p} [\mathrm{K}^2(x, x_i) + \mathrm{K}^2(x_1, x_i) + \ldots + \mathrm{K}^2(x_p, x_i)];\end{aligned}}$$

donc, d'après l'inégalité de Schwartz [1], le carré du coefficient considéré est au plus égal à l'intégrale de $\mathrm{P}^2\psi^2$. Or, P^2 est la somme de $(p+1)^{p+1}$ quantités de la forme

$$\mathrm{K}^2(x^0, s)\,\mathrm{K}^2(x^1, x_1)\,\mathrm{K}^2(x^2, x_2)\ldots\mathrm{K}^2(x^p, x_p),$$

les symboles $x^0, x^1, \ldots, x^p$ désignant certaines des variables $x, x_1, \ldots, x_p$. Multiplions une telle quantité par $\psi^2(s)$ et intégrons-la entre 0 et 1 par rapport à $s, x_1, \ldots, x_p$. L'intégrale en s remplace $\psi^2\mathrm{K}^2(x^0, s)$ par une fonction de x^0 au plus égale à $\mathrm{N}^2\mathrm{M}^2$; nous pourrons donc laisser de côté cette fonction dans les intégrations suivantes, à condition de multiplier le résultat par un nombre au plus égal à $\mathrm{N}^2\mathrm{M}^2$ (d'après la Note précédente). Nous pourrons de même supprimer dans notre produit $\mathrm{K}^2(x^i, x_i)$, si la variable x_i n'entre pas dans les termes restants, à condition de

---

[1] Cette inégalité s'écrit

$$\left(\int\int\ldots\int f\varphi\, d\tau\right)^2 \leqq \int\int\ldots\int f^2 d\tau . \int\int\ldots\int \varphi^2 d\tau;$$

elle se démontre, qu'il s'agisse d'intégrales au sens de Riemann ou au mien, en partant de l'inégalité analogue entre les sommes à un nombre fini de termes qui donnent des valeurs approchées des intégrales des deux membres. Cette inégalité suppose que les intégrales du second membre ont un sens.

Lorsque l'on a constamment $|\varphi| \leqq m$, cette inégalité peut être remplacée par la suivante, qui va bientôt être utilisée:

$$\left|\int\int\ldots\int f\varphi\, d\tau\right| \leqq m\left|\int\int\ldots\int |f|\, d\tau\right|.$$

multiplier l'intégrale de ces termes restants par un nombre au plus égal à M^2. Il nous reste donc finalement un produit, soit

$$K^2(x^1, x_1)\,K^2(x^2, x_2)\ldots K^2(x^k, x_k),$$

dans lequel chaque variable $x_i (1 \leqq i \leqq k)$ figure au moins dans deux termes et par suite exactement dans deux termes. x_1 figurera, par exemple, dans $K^2(x^1, x_1)$ et $K^2(x^2, x_2)$, c'est-à-dire qu'on aura $x^2 = x_1$.

Ces deux termes pourront encore être supprimés à condition de les remplacer par un multiplicateur au plus égal à M^4; après cette suppression, si $x^1 = x_2$, on opérera de même sur x_3, et si x^1 diffère de x_2 il y aura une variable x_i ne figurant plus que dans un terme, terme que l'on supprimera, etc.

On voit ainsi que l'intégrale de $\psi^2 P^2$ ne surpasse pas

$$(p+1)^{p+1}\,N^2 M^{2(p+1)},$$

et le coefficient de λ^{p+1} dans $\mathcal{E}(\lambda)$ est au plus égal à

$$\frac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{p!}\,N M^{p+1}.$$

Ceci posé, supposant de plus K représentable analytiquement, j'appelle K_n la fonction égale à K quand on a $|K| < n$, égale à n quand $K \geqq n$, égale à $-n$ quand $K \leqq -n$. K_n est bornée et représentable analytiquement, la formule (9) s'applique à l'équation de Fredholm correspondante, quand $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ est différent de zéro. D'ailleurs, d'une part, les séries d et fN sont encore majorantes pour $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathcal{E}_n(\lambda)$; d'autre part, un terme quelconque du développement des déterminants qui figurent dans $\mathfrak{D}_n$ ou $\mathcal{E}_n$ est plus petit en valeur absolue que celui qu'on obtient en supprimant les indices n et celui-là est sommable, ainsi même que son carré, comme on vient de le voir; donc, d'après le théorème du paragraphe 7 et les raisonnements du paragraphe 4, $\mathfrak{D}_n$ et $\mathcal{E}_n$ tendent vers $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{E}$. En supposant $\mathfrak{D}(\lambda) \neq 0$, Φ_n tend vers Φ.

D'ailleurs, $\rho_n = \psi - \Phi_n$ étant borné pour n assez grand, il en résulte, d'une part, que Φ est sommable et d'autre part que, si la constante H est convenablement choisie, $\Phi_n(s)\,K_n(x, s)$ ne surpasse pas la fonction $|K(x, s)|\,[|\psi(x)| + H]$ qui est sommable.

Donc, d'après le paragraphe 7, les termes de la relation

$$\Phi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s)\, \Phi_n(s)\, ds = \psi(x)$$

tendent respectivement vers ceux de

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \Phi(s)\, ds = \psi(x).$$

En résumé, il est démontré que *la formule* (9) *fournit une solution de l'équation* (1), *quand* $\mathfrak{D}(\lambda)$ *diffère de zéro, pourvu que les fonctions* $K(x, s)$, $\psi(x)$ *satisfassent aux conditions suivantes :*

1° *La fonction* $K(x, s)$ *est exprimable algébriquement;*

2° *Les quatre intégrales* $\int_0^1 K(x, s)\psi(s)\, ds$, $\int_0^1 K^2(s, s)\, ds$, $\int_0^1 K^2(x, s)\, ds$, $\int_0^1 K^2(x, s)\, K^2(s, y)\, ds$ *existent et sont uniformément bornées, quels que soient* x *et* y.

10. Les résultats précédents (¹) suffisent à montrer la puissance de la méthode de M. Goursat. Cette méthode comprend, d'une part, l'étude d'un cas particulier, d'autre part, un procédé d'extension. Le cas particulier étudié par M. Goursat est très intéressant à cause de sa généralité; mais, pour l'application de la méthode, on peut se restreindre à l'étude de cas plus particuliers (²). On est conduit immédiatement à celui que je vais considérer quand on cherche à appliquer à l'équation (1) l'une des méthodes qu'on emploie pour l'étude de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, mé-

(¹) Bien entendu, ces résultats s'obtiennent tout de suite par l'emploi de la méthode de vérification de M. Fredholm, mais il pouvait y avoir intérêt à montrer que la méthode de M. Goursat permet de s'élever de proche en proche jusqu'à des cas très généraux. La méthode qu'emploie M. Fredholm pour l'étude du cas où le noyau n'est pas borné est plus puissante et plus simple que la méthode directe du paragraphe 9. La condition relative à l'intégrale de $K^2(s, s)$ aurait pu être supprimée si l'on avait utilisé une remarque de M. Hilbert, déjà employée en note, d'après laquelle on peut toujours supposer $K(x, y) = 0$ pour $x = y$.

(²) On pourrait, par exemple, se restreindre au cas où $K(x, y)$ est un polynome; mais cette hypothèse ne semble pas entraîner de grandes simplifications quand il s'agit de rechercher pour la solution l'expression même qu'a donnée M. Fredholm.

thode qu'il est d'autant plus naturel d'appliquer à l'équation intégrale de Fredholm qu'elle repose sur le remplacement de l'équation différentielle par l'équation intégrale $y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$, ainsi que le remarque M. Hadamard [1].

Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en $n+1$ parties égales et soient x_0, $x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ valeurs prises dans ces $n+1$ intervalles; elles sont rangées dans un ordre quelconque, de sorte que je pourrai plus tard considérer x_0 comme une valeur quelconque de $(0, 1)$. L'équation (1) conduit à l'équation approchée

$$\varphi(x) + \frac{\lambda}{n+1} \sum_{i=0}^{i=n} K(x, x_i)\,\varphi(x_i) = \psi(x). \tag{13}$$

Cette équation serait exacte, si dans chaque intervalle considéré les fonctions $K(x, s)$ et $\varphi(s)$ de s restaient constantes.

Je suppose que les trois fonctions $\psi(s)$, $K(x, s)$, $K(s, x)$ soient constantes dans les intervalles considérés; alors, en donnant à x les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$, l'équation (13) fournit un système d'équations linéaires en $\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_n)$ qui montre qu'on peut en général satisfaire à l'équation (13) à l'aide d'une fonction $\varphi(s)$ constante dans les intervalles considérés.

La résolution de ce système donne, les indices supérieurs désignant toujours les variables et $\frac{\lambda}{n+1}$ étant remplacé par μ,

$$\varphi^0 = \frac{\begin{vmatrix} \psi^0 & \mu K^{0,1} & \mu K^{0,2} & \ldots & \mu K^{0,n} \\ \psi^1 & 1+\mu K^{1,1} & \mu K^{1,2} & \ldots & \mu K^{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi^n & \mu K^{n,1} & \mu K^{n,2} & \ldots & 1+\mu K^{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\mu K^{0,0} & \mu K^{0,1} & \mu K^{0,2} & \ldots & \mu K^{0,n} \\ \mu K^{1,0} & 1+\mu K^{1,1} & \mu K^{1,2} & \ldots & \mu K^{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu K^{n,0} & \mu K^{n,1} & \mu K^{n,2} & \ldots & 1+\mu K^{n,n} \end{vmatrix}}.$$

---

[1] *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles* (*Journal de Physique*, mars 1907).

Ce cas particulier est peut-être celui qui a conduit M. Fredholm aux expressions qu'il a introduites; on lit, en effet, dans une Note de M. Fredholm *Sur une classe de transformations rationnelles* (*Comptes rendus*, 27 janvier 1902) : *La théorie de l'équation* (1) *est un cas limite de la théorie des équations linéaires*...

J'indique encore que ce cas particulier conduit tout aussi facilement aux rela-

Développons, par exemple, le numérateur; en opérant comme pour C' on trouve que le coefficient de μ^p est la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans γ_p,

$$\gamma_p = \begin{vmatrix} \psi^0 & K^{0,\alpha_1} & K^{0,\alpha_2} & \dots & K^{0,\alpha_p} \\ \psi^{\alpha_1} & K^{\alpha_1,\alpha_1} & K^{\alpha_1,\alpha_2} & \dots & K^{\alpha_1,\alpha_p} \\ \psi^{\alpha_2} & K^{\alpha_2,\alpha_1} & K^{\alpha_2,\alpha_2} & \dots & K^{\alpha_2,\alpha_p} \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \psi^{\alpha_p} & K^{\alpha_p,\alpha_1} & K^{\alpha_p,\alpha_2} & \dots & K^{\alpha_p,\alpha_p} \end{vmatrix},$$

les indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ par toutes les combinaisons p à p des n indices $1, 2, \dots, n$. Chaque combinaison donne lieu à $p!$ arrangements; donc si nous divisons ensuite par $p!$ nous pourrons tenir compte de tous les arrangements et même de tous les arrangements avec répétition des $n+1$ indices $0, 1, \dots, n$; car si l'un des α_i est nul, ou si deux α_i sont égaux, le déterminant correspondant est nul.

Il résulte immédiatement de là que le coefficient de $\frac{\lambda^p}{p!}$ est le déterminant γ_p, dans lequel on considérera maintenant les x_{α_i} comme des variables et x_0 comme constant, intégré entre 0 et 1 par rapport à chacune des variables $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p}$. En développant maintenant γ_p, comme α_p, par rapport aux éléments de sa première colonne, on trouve pour le coefficient de $\frac{\lambda^p}{p!}$:

$$\psi(x_0)\int_0^1 \dots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_p \\ x_1, & \dots, & x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p$$
$$-p\int_0 \dots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_0, & x_1, & \dots, & x_{p-1} \\ s, & x_1, & \dots, & x_{p-1} \end{pmatrix} ds\, dx_1 \dots dx_{p-1}.$$

Un calcul analogue, mais plus simple, s'applique au dénominateur et l'on est conduit tout de suite à la formule (9).

---

tions entre ces quantités que M. Fredholm appelle des *mineurs* et qui jouent le rôle fondamental dans son Mémoire.

SUR LA THÉORIE DES MATRICES;

PAR M. DE SÉGUIER.

On connaît la méthode si simple de Kronecker (*Cr.*, t. **107**) pour la réduction (par additions, échanges, multiplications de lignes et de colonnes) des matrices dont les éléments sont entiers ou fonctions entières d'un paramètre variable. α_1 et α_0 étant deux matrices d'ordre n à éléments constants et $\alpha = t\alpha_0 + s\alpha_1$ un faisceau dont le déterminant peut être nul, on obtient ainsi deux matrices ξ, η (pouvant dépendre de s, t) telles que, dans $\xi\alpha\eta$, les seuls éléments $\neq 0$ soient dans la diagonale et soient les diviseurs élémentaires de α. Mais on sait aussi que l'on peut obtenir deux matrices u et v indépendantes de s, t telles que $u\alpha v$ ait une forme canonique complètement déterminée par certains éléments invariants de α. C'est cette autre réduction que je voudrais effectuer ici par une méthode semblable. On reconnaîtra d'ailleurs, sous l'exposition du n° 1, la marche indiquée récemment par M. Jordan (*J. M.*, 1907, p. 6-15). Dans le cas où α est réelle et symétrique, les mêmes procédés fournissent très simplement une généralisation du théorème de M. Loewy (*Cr.*, t. **122**) sur la limite supérieure de la caractéristique d'une forme quadratique ou d'une forme hermitienne. Dans le cas où $\alpha_1 = \varepsilon_n$ (je désignerai en général par ε_N la matrice unité d'ordre N), on obtient la forme canonique de α_0. Je montrerai pour terminer comment cette forme canonique permet d'établir simplement aussi et de généraliser en partie certains résultats dus à MM. Frobenius, Schur, Bromwich et Rados.

1. Soit donc $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ un faisceau de matrices dont le déterminant $|\alpha|$ peut être nul. Il s'agit de trouver deux matrices u et v de déterminant $\neq 0$, indépendantes de s, t, telles que

$$u\alpha v = A = A_0 t + A_1 s$$

soit la somme des matrices carrées composantes [1], dites *élémentaires,* des types suivants :

$$\varphi = \left\{\begin{matrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \end{matrix}\right\} = \varphi_0 t + \varphi_1 s,$$

$$\psi = \left\{\begin{matrix} t & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = \psi_0 t + \psi_1 s,$$

$$\chi = \left\{\begin{matrix} s - ts_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t & s - ts_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s - ts_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s - ts_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s - ts_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s - ts_i \end{matrix}\right\} = \chi_0 t + \chi_1 s,$$

$$\omega = \left\{\begin{matrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & t \end{matrix}\right\} = \omega_0 t + \omega_1 s,$$

dont je désignerai l'ordre, d'une manière générale, par q (pour $q = 1$, $\varphi = \psi = 0$), et éventuellement de matrices nulles [on remarquera que φ et ψ se ramènent respectivement, par permutation

---

[1] Je me servirai des mêmes notations que dans la Note II de mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904) auxquels je renverrai par la lettre *E*.

de lignes et de colonnes, aux matrices $\varphi_0 s + \varphi_1 t$, $\psi_0 s + \psi_1 t$ et que, si φ et ψ ont le même ordre, $\psi = \bar{\varphi}$; φ et ψ n'ont pas de diviseurs élémentaires; χ et ω ont respectivement les diviseurs élémentaires uniques $(s - ts_i)^q$ et t^q qui sont aussi des diviseurs élémentaires de A ou de α (*E.*, 190)] (¹).

Supposons d'abord que l'une des deux matrices α_0, α_1, par exemple α_0, soit de rang r inférieur à l'ordre n de α. Opérons sur α les *transformations* (j'entendrai par là des échanges, des multiplications, des additions à multiplicateur constant) de lignes et de colonnes qui réduisent α_0 à la forme diagonale $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$, le nombre des zéros étant $n - r$, et soit $\begin{pmatrix} sa & sb \\ sc & d \end{pmatrix}$ la matrice obtenue, a étant une matrice constante d'ordre $n - r$ et d une matrice d'ordre r.

Par des transformations de lignes et de colonnes on peut ramener sa à la forme diagonale $(0, \ldots, 0, s, \ldots, s)$, le nombre des zéros étant $n - r - \rho$. Soit alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & sb' \\ 0 & s\varepsilon_\rho & sb'' \\ sc' & sc'' & d \end{pmatrix}$ la matrice obtenue, les matrices b', b'', c', c'' et les matrices nulles indiquées par des zéros ayant des types évidents. Si ρ est > 0, on peut, par des additions et des échanges de lignes et de colonnes, annuler b'' et c'', puis réduire α à la somme de deux matrices composantes dont l'une est $s\varepsilon_1$, de la forme χ pour $s_i = 0$, $q = 1$. *Soit donc* $\rho = 0$, *c'est-à-dire* $a = 0$.

(¹) La forme A fournit immédiatement ce théorème de M. Stickelberger (*cf.* MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, p. 190) :

Considérons α comme une forme bilinéaire aux deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, et soient, en supposant α_0 de rang $< n$, $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$ $(k = 1, \ldots, p)$ un système complet de solutions indépendantes des équations $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y_i} = 0$, la solution générale étant $\xi_i = \Sigma_1^p u_k x_{ik}$ $(i = 1, \ldots, n)$; $y_{1k}, \ldots, y_{nk}$ $(k = 1, \ldots, p)$ un système complet de solutions indépendantes des équations $\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i} = 0$, la solution générale étant $\eta_i = \Sigma_1^p u_k y_{ik}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si, lorsqu'on remplace x_i par ξ_i et y_i par η_i, α_1 devient une forme bilinéaire de rang r dans les deux séries $u_1, \ldots, u_p$; $v_1, \ldots, v_p$, α a r diviseurs élémentaires égaux à t.

Il suffit de prendre α sous la forme A et de calculer les x_{ik}, y_{ik} : on voit alors tout de suite que A admet r composantes de la forme ω et d'ordre 1.

On peut ramener b, par des transformations de lignes et de colonnes, à la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s\varepsilon_\sigma & 0 \end{pmatrix}$, puis d par des transformations de lignes seulement [1] à la forme $t\varepsilon_r + sd'$, et faire passer les lignes nulles tout en bas du tableau.

Supposons d'abord $\sigma > 0$. α se trouve ainsi réduit à la forme $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, en posant

$$\begin{pmatrix} 0 & s\varepsilon_\sigma & 0 \\ sc_1 & t\varepsilon_\sigma + sd_1 & sd_2 \\ sc_2 & sd_3 & t\varepsilon_{r-\sigma} + sd_4 \end{pmatrix} = f,$$

d_1, d_2, d_3, d_4, c_1, c_2 ayant des types évidents. Par des additions des σ premières lignes de f à celles de rangs $\sigma + 1, \ldots$, on peut annuler d_1 et d_3. *Soit donc* $d_1 = d_3 = 0$.

Considérons la matrice $\beta = (c_1 \quad 0 \quad d_2)$ de type (σ, n). Si son rang est $< \sigma$, on pourra, par une transformation T *de lignes seulement,* annuler sa première ligne. En opérant cette transformation sur les lignes de rangs $\sigma + 1, \ldots, 2\sigma$ de f (ce qui revient à multiplier à droite par une certaine matrice u), puis sur les *colonnes* des mêmes rangs la transformation inverse (celle qui revient à multiplier à gauche par u^{-1}), puis sur les σ premières *lignes* de f la transformation T, $s\varepsilon_\sigma$ et $t\varepsilon_\sigma$ sont inaltérées, et f se réduit immédiatement, par des transformations de lignes et de colonnes, à la somme de deux matrices composantes dont l'une $\begin{pmatrix} s & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ se réduit de même à $\begin{pmatrix} t & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}$, du type φ pour $q = 2$. On est ainsi ramené à une valeur moindre de n. *Soit donc* σ *le rang de* β.

Si alors c_1 est $\neq 0$, on peut, par des transformations analogues, réduire (sans altérer $s\varepsilon_\sigma$ ni $t\varepsilon_\sigma$) tous les éléments d'une des $n - r$ premières colonnes à 0 sauf un, qu'une multiplication de colonne réduira à s. Au moyen de cet élément on annulera, par addition

---

[1] d est de la forme $d_0 t + d_1 s$ avec $|d_0| \neq 0$. Or on peut, par des transformations de lignes seulement, annuler d'abord tous les éléments de d_0 situés au-dessous de la diagonale (*E.*, p. 193). *Les éléments de la diagonale étant ici tous* $\neq 0$, on peut, par de nouvelles transformations évidentes de lignes, annuler tous les éléments situés au-dessus.

de colonnes, ceux de sa ligne qui sont dans $s\,d_2$. On pourra alors, par des échanges de lignes et de colonnes, faire apparaître la matrice composante $\begin{pmatrix} 0 & s \\ s & t \end{pmatrix}$ qui se réduit, par échanges des colonnes, à $\begin{pmatrix} s & 0 \\ t & s \end{pmatrix}$ de la forme χ pour $s_i = 0$, $q = 2$ (on serait arrivé à la forme ω si, au début, on avait supposé α_1 de rang $r < n$, ce qui aurait produit partout l'échange de s, t). *Soit donc* $c_1 = 0$. $\beta = (0 \quad 0 \quad d_2)$ ayant ainsi le rang σ et d_2 le type $(\sigma, r - \sigma)$, *il faut que* $r - \sigma$ *soit* $\geqq \sigma$ *ou* $r \geqq 2\sigma$.

Par des transformations de $r - \sigma$ dernières colonnes et des lignes de rangs $\sigma + 1, \ldots, 2\sigma$, chaque transformation de lignes étant accompagnée de la même transformation opérée sur les σ premières lignes de f et de la transformation inverse sur les colonnes de rangs $n - r + 1, \ldots, n - r + \sigma$, *on peut ramener* d_2, *qui est de rang* σ, *à la forme diagonale* $(1, 1, \ldots, 1)$ [*de type* $(\sigma, r - \sigma)$]. Par des additions des lignes de rangs $\sigma + 1, \ldots, 2\sigma$ aux suivantes, suivies chacune de l'opération inverse sur les colonnes de f, *on peut annuler les éléments de* d_4 *situés dans les colonnes de rangs* $n - r + \sigma + 1, \ldots, n - r + 2\sigma$. f se trouve ramenée à la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & s\varepsilon_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & t\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & 0 \\ sc'_1 & 0 & t\varepsilon_\sigma & sd'_2 \\ sc'_2 & 0 & 0 & t\varepsilon_{r-2\sigma} + sd'_4 \end{pmatrix} = f'.$$

Si la matrice $\beta' = (c'_1 \quad 0 \quad 0 \quad d'_2)$, de type (σ, n), est de rang $< \sigma$, on fera apparaître, par des opérations toutes semblables à celles employées plus haut, la matrice composante $\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$ qui se ramène à φ pour $q = 3$.

Si β' est de rang σ et $c'_1 \neq 0$, on détache encore, comme plus haut, la matrice composante $\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & t & s \end{pmatrix}$ du type χ pour $s_i = 0$, $q = 3$.

Si β' est de rang σ et $c'_1 = 0$, on ramène encore comme précédemment f' à la forme [d'_2 ayant le type $(\sigma, r - 2\sigma)$ et le rang σ,

il faut que $r - 2\sigma$ *soit* $\geqq \sigma$ *ou* $r \geqq 3\sigma$)]

$$\left\{\begin{matrix} 0 & s\varepsilon_\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & 0 \\ sc''_1 & 0 & 0 & t\varepsilon_\sigma & sd''_2 \\ sc''_2 & 0 & 0 & 0 & t\varepsilon_{r-2\sigma} + sd''_4 \end{matrix}\right\} = f''$$

sur laquelle on raisonnera de même.

Si $\sigma = 0$, ou bien $c = 0$ et on est ramené à la réduction de d d'ordre $< n$, ou bien c est $\neq 0$ et, par des transformations des colonnes de sc et de sd' analogues aux précédentes, on isolera une matrice composante de la forme $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons maintenant que α_0 et α_1 soient de rang n et considérons le faisceau $t(\alpha_0 + s_1\alpha_1) + s\alpha_1$, $s - ts_1$ étant un facteur de $|t\alpha_0 + s\alpha_1|$. Le rang de $\beta_0 = \alpha_0 + s_1\alpha_1$ étant $< n$, on pourra appliquer à $\beta = t\beta_0 + s\alpha_1$ la méthode précédente. Supposons donc que $x\beta y$ soit une somme de matrices composantes élémentaires; α_1 ayant le rang n, ces matrices seront toutes de la forme χ ou ω; de plus, $|\beta|$ ayant le facteur s, l'une d'elles χ' aura la forme χ avec $s_i = 0$. Donc $x\alpha_1 y$ est une somme de matrices composantes dont l'une se déduit de χ' en faisant $s = 1$, $t = 0$. Donc $x\alpha y = x\beta y - ts_1 x\alpha_1 y$ est une somme de matrices composantes dont l'une a la forme χ avec $s_i = s_1$. On est donc ramené à un ordre $< n$.

2. Soient $\varphi^1, \ldots, \varphi^h$, des ordres respectifs $q_1, \ldots, q_h$ $(q_i \leqq q_{i+1})$, les matrices composantes de A de la forme φ; $\psi^1, \ldots, \psi^k$, des ordres respectifs $r, \ldots, r_k$ $(r_i \leqq r_{i+1})$, celles de la forme ψ; $\chi^1, \ldots$ et $\omega^1, \ldots$ celles des formes χ et ω.

Assimilons α à la forme bilinéaire $\Sigma\alpha_{ik}x_iy_k$. A chaque combinaison de n' lignes (colonnes) où tous les déterminants d'ordre $r' + 1 \leqq n'$ sont nuls (j'appellerai une telle combinaison *singulière*) mais non tous ceux d'ordre r' répondent $n - r'$ relations linéaires distinctes entre les dérivées par rapport aux $x_i(y_k)$. Appelons *degré* en s, t *d'une telle relation,* que je supposerai toujours mise sous forme entière en s, t, le degré minimum auquel on la réduit par suppression des facteurs communs. On

vérifie directement que *ce degré ne croît jamais lorsqu'on change linéairement les variables* x_i, y_i.

A la combinaison singulière des q_i lignes de A qui contiennent les éléments de φ^i répond évidemment une seule relation linéaire $R_i = 0$ entre les dérivées de $A = \Sigma A_{ik} X_i Y_k$ par rapport aux X_i, homogène et de degré $q_i - 1$ exactement en s, t [ainsi, pour $\varphi^1 = t\Sigma_1^{q_1-1} X_i Y_i + \Sigma_2^{q_1} X_i Y_{i-1} = \Sigma_1^{q_1} \varphi^{1i} X_i$, R_1 est, à un facteur constant près, $\Sigma_1^{q_1} s^{q_1-i}(-t)^{i-1} \varphi^{1i}$], et, comme la combinaison de lignes obtenues en supprimant dans A les lignes nulles et la dernière ligne de chaque φ^i n'est pas singulière, il n'y a pas, entre ces dérivées, plus de h relations distinctes. D'ailleurs, chaque dérivée ne figurant que dans un R_i, *les* $R_i = 0$ *sont distinctes* et, dans tout système équivalent de relations $R'_1 = 0, \ldots, R'_h = 0$ homogènes en s, t, les R'_i sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers en s, t des R_i. De plus, *si l'on range les* $R'_i = 0$ *dans un ordre tel que le degré* δ_i *de* R'_i *en* s, t *soit* $\leqq \delta_{i+1}$, δ_i *est* $\geqq q_i - 1$. En effet, supposons prouvé que δ_i est $\geqq q_i - 1$ pour $i = 1, \ldots, j$. Si δ_j est $\geqq q_{j+1} - 1$, il en sera de même, *a fortiori*, de δ_{j+1}. Si δ_j est $< q_{j+1} - 1$, $R'_1, \ldots, R'_j$ sont des combinaisons linéaires de $R_1, \ldots, R_j$ seulement. Donc, $R'_{j+1} = 0$ étant distincte de $R'_1 = 0, \ldots, R'_j = 0$, un au moins des R_i, où i est $> j$, devra figurer dans R'_{j+1}. Donc δ_{j+1} est $\geqq q_{j+1} - 1$. Les variables Y_i donnent lieu à des considérations analogues.

Le nombre des relations distinctes entre les dérivées de α *par rapport aux* x_i *est évidemment* h, *et, dans tout système de* h *relations distinctes entre ces dérivées, les degrés de ces relations, rangés dans un ordre tel qu'ils ne décroissent pas, sont au moins égaux à* $q_1 - 1, \ldots, q_h - 1$ *respectivement* (on le voit en repassant aux variables X_i, Y_i) *et peuvent effectivement atteindre ces nombres* (on le voit en passant des variables X_i, Y_i aux variables x_i, y_i).

Les degrés $q_i - 1$ *et de même les* $r_i - 1$ *que j'appellerai* degrés canoniques, *comme aussi les nombres* h *et* k *de ces degrés, sont donc des invariants, et il en résulte que la forme* A *est unique.* Je dirai que A est la *première forme canonique* ou simplement la *forme canonique de* α. Si $\alpha_1 = \varepsilon_n$, A ne contient évidemment que des matrices χ^i, c'est-à-dire que, si $u\alpha v = A$, uv est égal à ε_n; alors $A_0 = v^{-1}\alpha_0 v$ est la *forme canonique de* α_0.

Si, dans chacune des matrices φ, ψ, χ, ω on échange les lignes équidistantes des extrêmes, ce qui revient à la multiplier à droite par une matrice carrée η_q d'ordre q où tous les éléments de la transversale principale (en appelant *transversale* toute file d'éléments perpendiculaire à la diagonale principale, et *transversale principale* celle où figure le dernier élément de la première ligne) sont égaux à 1 et les autres nuls, on obtient respectivement des matrices $\varphi^0 = \varphi_0^0 t + \varphi_1^0 s$, $\psi^0 = \psi_0^0 t + \psi_1^0 s$, $\chi^0 = \chi_0^0 t + \chi_1^0 s$, $\omega^0 = \omega_0^0 t + \omega_1^0 s$ dont les deux dernières sont symétriques. Si l'on transforme ainsi chaque composante élémentaire de A (je désignerai par φ^{i0}, ψ^{i0}, χ^{i0}, ω^{i0} ce que deviennent respectivement φ^i, ψ^i, χ^i, ω^i), A devient *la seconde forme canonique*

$$A^0 = A_0^0 t + A_1^0 s$$

de α.

En posant $s = \lambda s' + \mu t'$, $t = \lambda' s' + \mu' t'$ $(\lambda\mu' \neq \mu\lambda')$, $\alpha'_0 = \mu'\alpha_0 + \mu\alpha_1$, $\alpha'_1 = \lambda'\alpha_0 + \lambda\alpha_1$, on a $\alpha = t'\alpha'_0 + s'\alpha'_1$, et chaque diviseur élémentaire $(as + bt)^\rho$ de α devient $[(a\lambda + b\lambda')s' + (a\mu + b\mu')t]^\rho$; il est clair que l'on peut disposer de λ, μ, λ', μ' de manière que trois de ces diviseurs élémentaires s'annulent pour des valeurs arbitraires de $s' : t'$. D'ailleurs les degrés canoniques restent évidemment inaltérés. Donc la forme canonique de α, lorsqu'on passe aux variables s', t', ne subit d'autre changement que la substitution aux matrices χ^i, ω^i des matrices construites de même avec les nouveaux diviseurs élémentaires.

Il est clair que, si $\beta = \beta_0 t + \beta_1 s$ (β_0 et β_1 étant constantes) a la même forme canonique que α, β est de la forme $\xi\alpha\eta$, ξ et η étant des matrices invertibles constantes d'ordre n, et réciproquement. α et β sont alors dits *équivalents*.

Soit C un champ contenant les éléments de α_0, α_1. La méthode de réduction précédente montre que l'on peut trouver deux matrices invertibles x, y à éléments dans C, telles que $x\alpha y = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ étant la somme des matrices composantes φ^i, ψ^i, ω^i et d'une matrice α' équivalente à la somme des matrices composantes χ^i. On peut alors démontrer directement et sans passer par la forme canonique qu'il existe deux matrices ξ, η constantes et invertibles telles que $\xi\alpha'\eta = \beta'$, β' étant une matrice quelconque équivalente à α' (*cf.* Frobenius, *Cr.*, t. 86, p. 202-204). On déduit de là

pour α des formes réduites successives dans les divers champs contenant C (*cf. E.*, **204**; le n° **203** est inexact).

3. Soit maintenant α une substitution d'ordre n invertible ou non. Convenons que, si $f(x)$ est un polynome ou une série entière, convergente sur tout le plan, $f(\alpha)$ se forme en remplaçant x par α et en multipliant le terme constant par $\varepsilon_n = \varepsilon$. Le sens de $f(\alpha)$ est alors évident par lui-même.

Soient $s_{l0} = s_0, \ldots, s_{l\nu_l} = s_{\nu_l}$ les racines d'un facteur f_l de $|\alpha - s\varepsilon| = \Delta(s)$, irréductible dans le champ considéré; $y_{j1}, \ldots, y_{jm_j}$ ($m_j = m_{jl}$) les variables de la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_0 (d'après la terminologie du Traité de M. Jordan); α_{ljo} l'action de α sur $y_{j1}, \ldots, y_{jm_j}$. Prenons α sous forme canonique. D'après l'expression connue de α^λ, on aura, $\varphi(x)$ étant un polynome, en posant $\frac{\varphi^{(i)}(s_0)}{1\ldots i} = \varphi_i$,

$$(1) \qquad \varphi(\alpha_{ljo}) = \begin{vmatrix} y_{j1} & \varphi_0 y_{j1} \\ y_{j2} & \varphi_1 y_{j1} + \varphi_0 y_{j2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{jr} & \varphi_{r-1} y_{j1} + \ldots + \varphi_{r-i} y_{ji} + \ldots + \varphi_0 y_{jr} \end{vmatrix};$$

$\varphi(\alpha)$ est le produit des substitutions analogues à φ_{ljo}).

Pour que $\varphi(\alpha)$ soit nul, il faut et suffit, si $m_j \geqq m_{j+1}$, que $\varphi(s_k)$, $\varphi'(s_k), \ldots, \varphi^{(m_l-1)}(s_k)$ soient nuls (l prenant toutes ses valeurs), c'est-à-dire que s_k soit racine m_l^{uple} de φ. Or $(s - s_k)^{m_l}$ est le premier diviseur élémentaire de $\Delta(s)$ relatif à $s - s_k$ (*E.*, §§ **190**, **201**). Donc, pour que $\varphi(\alpha) = 0$, il faut et il suffit que $\varphi(s)$ soit divisible par le quotient $\psi(s)$ de $\Delta(s)$ par le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $n - 1$ de $\Delta(s)$.

En formant l'inverse de $\varphi(\alpha_{ljo})$, puis le produit de deux substitutions de la forme (1), on voit directement que la formule (1) subsiste si φ est seulement rationnelle (mais finie aux points s_{lk}).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction quelconque régulière aux points s_{lk}. La formule (1) montre encore de suite le sens qu'il faudra attacher à $\varphi(\alpha)$. De plus, $\frac{P}{\psi}$ désignant alors la somme des parties fractionnaires des développements de $\frac{\varphi}{\psi}$ relatifs aux points s_{lk} (si m est le degré de ψ, P est un polynome de degré $\leqq m - 1$ qui,

lorsque φ n'est pas uniforme, dépend de la branche choisie en chaque point s_{lk}), $\frac{\varphi - P}{\psi} = \omega$ sera régulière aux points s_{lk} (tout polynome Q de degré $\leqq m - 1$ pour lequel $\frac{\varphi - Q}{\psi}$ est régulière aux points s_{lk} coïncide avec P puisque $P - Q$ est divisible par ψ). *Donc* $\omega(\alpha)$ *aura un sens défini. Donc* $\varphi(\alpha) = P(\alpha)$ (¹).

Revenant aux variables primitives, on voit, d'après (1) ou d'après l'égalité $\varphi(\alpha) = P(\alpha)$, que $\varphi(\alpha)$ sera réelle si α est réelle et que $\varphi(s_i)$ est conjuguée de $\varphi(s_k)$ quand s_i l'est de s_k.

Si φ vérifie identiquement une équation $f(x, \varphi) = 0$, on aura évidemment $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$; si, de plus, $f(x, P)$ est régulière aux points s_{lk} et si le développement de $f(x, P + \omega\psi)$, suivant les puissances de $\omega\psi$, a un sens, on aura aussi $f[\alpha, P(\alpha)] = 0$. C'est ce qui a lieu, par exemple, si $f(x, \varphi)$ est un polynome en x, φ ou si $f(x, \varphi) = e^{\varphi} - x$ ou si $f(x, \varphi) = e^{mx} - \varphi^m$. Supposons que $f(x)$ soit un polynome en x, φ. Comme $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$, une des déterminations de $\varphi(\bar{\alpha})$ est $\overline{\varphi(\alpha)}$. De même, si les équations $f(x, \varphi^{-1}) = 0$ et $f(x^{-1}, \varphi) = 0$ sont équivalentes, $\varphi(\alpha^{-1})$ et $\varphi(\alpha)^{-1}$ ont une détermination commune. Ainsi $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ et $(\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ou $\alpha^{\frac{-1}{2}}$ ont une détermination commune [en supposant $|\alpha| \neq 0$ pour que $\psi(0)$ soit $\neq 0$].

On déduit de là (Frobenius, *loc. cit.*) que, *si* $x\alpha y$ *avec* $|xy| \neq 0$ *et* $\bar{\alpha} = \theta\alpha$, $\bar{\beta} = \theta\beta$ ($\theta = \pm 1$), β *est de la forme* $v\alpha\bar{v}$, v *étant indépendante de* α, β, car, en transposant, en éliminant β et en posant $y^{-1}x = z$, on a $\alpha^{-1}z\alpha = z$, d'où $\alpha^{-1}u\alpha = \bar{u}$, $\bar{u}$ étant un polynome quelconque en z. Donc, si $|u| \neq 0$, $\beta = xu^{-1}\alpha\bar{u}y$. Or, en posant $xu^{-1} = v$, la condition $\bar{u}y = \bar{v}$, qui s'écrit $u^2 = z$, est toujours réalisable, puisque $|z|$ est $\neq 0$. *Si* $y = x^{-1}$, v *est orthogonale,* car alors $x\varepsilon y = \varepsilon$ et v est indépendante de α, β.

4. Reprenons maintenant les notations des n^os^ **1** et **2**. Supposons la matrice $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ symétrique et ramenons-la à la seconde forme canonique A^0. α étant symétrique, on aura $h = k$,

(¹) *Comparer* Frobenius, *S. A. B.*, 1896, p. 7; Bromwich, *P. C. P. S.*, t. XI p. 75 (1901).

$q_i = r_i$. Donc $\begin{pmatrix} \varphi^{i0} & 0 \\ 0 & \psi^{i0} \end{pmatrix}$ devient, par l'échange des lignes équidistantes des extrêmes, une matrice symétrique $\sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \psi^i \\ \varphi^i & 0 \end{pmatrix}$; je désignerai par σ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$ où φ et ψ sont du même ordre q. Soit $A^{00} = A_0^{00} t + A_1^{00} s$ la somme des matrices composantes σ^i, χ^{i0}, ω^{i0}. A^{00} étant symétrique, on pourra trouver une matrice invertible constante u telle que $u\alpha\bar{u} = A^{00}$.

Supposons α réelle mais non nécessairement symétrique. On pourra d'abord, par des substitutions réelles, ramener α à la somme d'une matrice composante α', somme elle-même de matrices composantes des formes φ^0, ψ^0, ω^0 et d'une autre matrice composante $\alpha'' = \alpha''_0 t + \alpha''_1 s$ d'ordre n'' où $|\alpha''_1| \neq 0$ (si α est symétrique, on peut supposer et je supposerai que α' est une somme de matrices composantes des types σ, ω^0). Soit $f = s^2 + ast + bt^2$ $(a^2 < 4b)$ un facteur quadratique réel de $|\alpha''|$, donc de

$$|\alpha''\alpha''^{-1}_1| = |\alpha''_0 \alpha''^{-1}_1 t + \varepsilon_{n''} s|.$$

On pourra trouver (*E.*, **204**) une substitution *réelle* x telle que $x\alpha''\alpha''^{-1}_1 x^{-1}$ soit une somme de matrices composantes réelles de la forme χ et de la forme

$$X = \begin{Bmatrix} at+s & -bt & 0 & 0 & \dots \\ t & s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t & at+s & -bt & \dots \\ 0 & 0 & t & s & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{Bmatrix} = X_0 t + X s$$

(je désignerai l'ordre de X par $2q$) et, par suite, deux substitutions réelles x, y telles que $x\alpha y$ soit une somme $B = B_0 t + B_1 s$ de matrices composantes des formes φ^0, ψ^0, ω^0, χ, X (ou σ, ω^0, χ, X si α est symétrique). En ajoutant dans X, à chaque ligne de rang impair, la ligne suivante multipliée par $-a$ et en échangeant les lignes équidistantes des extrêmes, on obtient la matrice symétrique

$$X^0 = \begin{Bmatrix} \dots & 0 & 0 & t & s \\ \dots & 0 & t & s & -as-bt \\ \dots & t & s & 0 & 0 \\ \dots & s & -as-bt & 0 & 0 \\ \dots & . & \dots\dots\dots & . & . \end{Bmatrix} = X_0^0 t + X_1^0 s.$$

La matrice $B^0 = B_0^0 t + B_1^0 s$ déduite de B en remplaçant chaque matrice composante de la forme X ou χ par la matrice correspondante de la forme X^0 ou χ^0 respectivement est symétrique et équivalente à α. *Si donc α est symétrique, il y aura une matrice réelle v telle que $v\alpha\bar{v} = B$.*

On peut simplifier encore B_0^0. Considérons d'abord une composante de la forme X_0^0. Par des additions de multiplicateur b^{-1} on réduit (dans X_0^0) la transversale située immédiatement au-dessus de la principale à 1, 0, 1, 0, ... (en convenant d'écrire les éléments des transversales dans l'ordre où ils se présentent à partir de l'élément en haut à droite) sans autres changements. Considérons maintenant une composante de la forme χ_0^0. Si $s_i \neq 0$, par des additions de multiplicateur s_i^{-1} on ramène tous les éléments de la transversale située immédiatement au-dessus de la principale à 0, puis, par des multiplications de multiplicateur $-s_i^{-1}$ ou s_i^{-1}, tous ceux de la principale à 1 ou à -1. Si $s_i = 0$, on conservera χ_0^0. Soit B'_0 la nouvelle forme réduite obtenue. On saura former une substitution réelle U telle que $UB_0^0\bar{U} = B'_0$. Soit alors

$$B' = UB^0\bar{U} = B'_0 t + B'_1 s.$$

Si α est symétrique, la caractéristique [1] c de α_0 étant évidemment supérieure ou égale à la somme des caractéristiques des matrices composantes de B'_0, B'_0 fournit immédiatement $\left[\text{en observant que } xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$ l'inégalité

$$(2) \quad c \geqq \Sigma\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) + \Sigma E\left(\frac{\mu'}{2}\right) + \frac{1}{2}\Sigma m'' + \Sigma E\left(\frac{m'}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{m^0 - 1}{2}\right),$$

où μ et μ' parcourent respectivement les ordres des matrices composantes des types σ et ω^0, où m'', m', m^0 parcourent respectivement les exposants des diviseurs élémentaires de α'' relatifs aux racines imaginaires, réelles $\neq 0$, nulles, où enfin $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqq x$.

---

[1] Si α est symétrique, on peut l'assimiler à une forme quadratique, et la caractéristique d'une forme quadratique réelle est, en supposant qu'elle se décompose en h carrés positifs et k carrés négatifs, le plus petit des deux nombres h, k. Le théorème établi au texte a été démontré autrement par M. Loewy (*Cr.*, t. 122) pour le cas $|\alpha_1| \neq 0$.

De la formule (2) multipliée par 2 et de l'égalité évidente $n = \Sigma\mu + \Sigma\mu' + \Sigma m'' + \Sigma m' + \Sigma m^0$ on déduit par soustraction, en désignant par ν le nombre des matrices composantes du type σ,

$$\Sigma\mu' + \Sigma m' + \Sigma m^0$$
$$\geqq n - 2c - 2\nu + 2\Sigma E\left(\frac{\mu'}{2}\right) + 2\Sigma E\left(\frac{m'}{2}\right) + 2\Sigma E\left(\frac{m^0 - 1}{2}\right).$$

Si donc $\nu = 0$, *c'est-à-dire si* $|\alpha|$ *n'est pas identiquement nul, le nombre des facteurs linéaires réels de* $|\alpha|$ *est* $\geqq n - 2c$. *S'il est égal à* $n - 2c$, *les valeurs de* μ' *et celles de* m' *sont toutes égales à* 1 *et celles de* m^0 *à* 1 *ou à* 2. *En particulier* (*pour* $\alpha_0 = -\varepsilon$ *d'où* $c = 0$) *les multiplicateurs d'une matrice symétrique réelle invertible* (α_1) *sont tous réels et sa forme canonique est monome.*

On peut toujours construire un faisceau symétrique réel d'ordre n $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ *lorsqu'on se donne ses diviseurs élémentaires, les nombres* μ, *les nombres* μ' *et* α_0, *pourvu que les diviseurs élémentaires satisfassent à la condition* (2), *que*

$$n - \Sigma\mu - \Sigma\mu' - \Sigma m^0$$

soit égal au rang r *de* α_0 *et, bien entendu, que la somme des* μ, *des* μ', *des* m'', *des* m', *des* m^0 *soit égale à* n *et que les diviseurs élémentaires imaginaires soient deux à deux conjugués.* Construisons, en effet, avec les éléments donnés la matrice B^0; déduisons-en comme tout à l'heure la matrice B' et désignons par m le second membre de (2). Soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 s$ la matrice symétrique variable qu'on déduit de B' en y changeant arbitrairement les signes des composantes. Par ces changements de signes la caractéristique de $\mathfrak{B}_0$ varie évidemment depuis le minimum m jusqu'au maximum $E\left(\frac{r}{2}\right)$. La caractéristique c de α_0 étant $\geqq m$ et $\leqq E\left(\frac{r}{2}\right)$, soit $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'_0 t + \mathfrak{B}'_1 s$ une détermination de $\mathfrak{B}'$ telle que $\mathfrak{B}'_0$ ait la caractéristique c. $\mathfrak{B}'_0$ ayant le rang de α_0, il y aura une substitution réelle invertible u telle que $u\alpha_0 u = \mathfrak{B}'_0$, et α_1 sera déterminée par $u\alpha_1 \bar{u} = \mathfrak{B}'_1$.

5. Considérons encore deux matrices a, b d'ordre n, telles que $\dot{a} = a$ ($\dot{x}$ désignant, en général, la matrice imaginaire conjuguée

de n), $\bar{b} = \dot{b}$, $b = \xi a \eta$ ($|\xi\eta| \neq 0$). Assimilons a et b respectivement aux formes $\Sigma a_{kl} x_k y_l$ et $\Sigma b_{kl} x_k y_l$, et posons $a_{kl} = a'_{kl} + i a''_{kl}$, $b_{kl} = b'_{kl} + i b''_{kl}$, $x_k = x'_k + i x''_k$, $y_l = y'_l - i y'_l$, a'_{kl}, a''_{kl}, b'_{kl}, b''_{kl}, x'_k, $x''_k = x'_{n+k}$, y'_l et $y''_l = y'_{n+l}$ étant réels. a et b prennent les formes respectives $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\beta = \beta' + i\beta''$, α' et β' étant des formes symétriques réelles et α'', β'' des formes alternées réelles des deux séries de $2n$ variables $x'_1, \ldots, x'_{2n}$; $y'_1, \ldots, y'_{2n}$. Comme on obtient b en soumettant les x et les y de a aux substitutions respectives $\bar{\eta} = |x_k, \Sigma \eta_{lk} x_l|$, $\xi = |y_k, \Sigma \xi_{kl} y_l|$ qui, en posant $\eta_{lk} = \eta'_{kl} + i\eta''_{kl}$, $\xi_{kl} = \xi'_{kl} + i\xi''_{kl}$ (les η', η'', ξ', ξ'' étant réels), opèrent sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$; $y'_1, \ldots, y'_{2n}$ les substitutions respectives $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}' & -\bar{\eta}'' \\ \bar{\eta}'' & \bar{\eta}' \end{pmatrix}$, $x \begin{pmatrix} \xi' & \xi'' \\ -\xi'' & \xi' \end{pmatrix}$ [$\eta' = (\eta'_{kl})$, $\eta'' = (\eta''_{kl})$, $\xi' = (\xi'_{kl})$, $\xi'' = (\xi''_{kl})$], on aura $\beta = x\alpha y$. Disons qu'une substitution réelle de $x'_1, \ldots, x'_{2n}$, de la forme $z = \begin{pmatrix} \zeta' & -\zeta'' \\ \zeta'' & \zeta' \end{pmatrix}$ (ζ' et ζ'' étant des matrices d'ordre n), est quasi-imaginaire et correspond (biunivoquement) à la substitution $\zeta = \zeta' + i\zeta''$; $\bar{z}$ répond à $\bar{\dot{\zeta}}$ et z opère sur les x_k et les $\dot{x}_k$ les substitutions respectives ζ et $\dot{\zeta}$; inversement ζ comme $\dot{\zeta}$ opèrent sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$ la substitution z. Soient $t = \begin{pmatrix} \tau' & -\tau'' \\ \tau'' & \tau' \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \upsilon' & -\upsilon'' \\ \upsilon'' & \upsilon' \end{pmatrix}$ deux autres substitutions quasi-imaginaires et $\tau = \tau' + i\tau''$, $\upsilon = \upsilon' + i\upsilon''$ leurs correspondantes. Comme $\tau\upsilon$ est l'action de tu sur les x_k et tu celle de $\tau\upsilon$ sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$, il est clair que, si $tu = z$, on a $\tau\upsilon = \zeta$ et réciproquement. En particulier, si $\tau\upsilon = \varepsilon_n$, on a $tu = \varepsilon_{2n}$ (la correspondante de ε_{2n} est évidemment ε_n); donc la correspondante de τ^{-1} est t^{-1}. Donc la matrice réelle υ telle que $\beta = v\alpha\bar{v}$ (3) est quasi-imaginaire, et, si son action sur les x_k est φ, son action sur les x_k est $\dot{\varphi}$. *Donc les relations* $b = \xi a \eta$, $\bar{a} = \theta \dot{a}$, $\bar{b} = \theta \dot{b}$ ($\theta = \pm 1$; le cas $\theta = -1$ se ramène au cas $\theta = 1$ en remplaçant a par ia et b par ib) *entraînent l'existence d'une matrice* φ, *indépendante de* a, b, *telle que* $b = \dot{\varphi} a \bar{\varphi}$.

De là résultent des conséquences toutes semblables à celles de tout à l'heure. En particulier, pour une forme a hermitienne (alors $\alpha'' = \beta'' = 0$), en observant qu'à chaque diviseur élémen-

x par celles des ρ_i qui sont distinctes, h étant leur nombre, les valeurs correspondantes ρ'_i [alors $\varphi(\rho_i) = \rho'_i$ quelle que soit ρ_i], on a évidemment $\alpha' = \varphi(\alpha)$.

7. *La formule* (1) *met immédiatement en évidence les multiplicateurs de* $\varphi(\alpha)$. De plus, elle donne très simplement les diviseurs élémentaires de $\varphi(\alpha) - s\varepsilon$. Supposons, en effet, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}$ nuls, φ_d étant $\neq 0$. Soit $m_j = dq + r$ $(0 \leqq r < d)$, et considérons $\varphi(\alpha_{lj0}) - s\varepsilon_{m_j} = \Phi$. Ajoutons la $(d+1)^e$ ligne de Φ multipliée par $-\varphi_{d+1} : \varphi_d$ à la $(d+2)^e$, puis la $(d+2)^e$ colonne multipliée par $\varphi_{d+1} : \varphi_d$ à la $(d+1)^e$: on aura ainsi remplacé par 0 l'élément φ_{d+1} de la première colonne sans que s figure hors de la diagonale principale. Par des opérations analogues, on ramène Φ à la forme qu'elle aurait pour $\varphi_{d+1} = \varphi_{d+2} = \ldots = 0$. Soit Φ' la matrice qu'on déduit alors de Φ en écrivant d'abord la première ligne, puis la $(d+1)^e$, puis la $(2d+1)^e$, ..., puis la $(qd+1)^e$, puis la 2e, puis la $(d+2)^e$, puis la $(2d+2)^e$, ..., puis la $(qd+2)^e$, ..., puis la $(qd+r)^e$. Soit Φ'' la matrice déduite de Φ' en y prenant les colonnes dans l'ordre où l'on a pris les lignes de Φ pour obtenir Φ'. Φ'' équivaut à Φ et a la forme canonique. On y voit que $\varphi(\alpha_{lj0}) - s\varepsilon_{m_j}$ *a* r *diviseurs élémentaires de la forme* $(s - \varphi_0)^{q+1}$ *et* $d - r$ *de la forme* $(s - \varphi_0)^q$ [1]. Si $(s - \varphi^0)^{m_\varphi}$ est, pour $\varphi(\alpha) - s\varepsilon$, le diviseur élémentaire d'exposant maximum relatif à la base $s - \varphi_0$, m_φ est $\leqq m_1$. Si donc le polynome $\psi(x)$ a la forme $\Pi_1^q (s - \rho_i)^{\lambda_i}$, les ρ_i étant distincts, $\varphi(\alpha)$ annulera le polynome $\Pi_1^q [s - \varphi(\rho_i)]^{\lambda_i}$.

8. $x'\alpha' + x\alpha$ (x et x' étant indéterminés) se déduit de α' en remplaçant U_{r1}^{r1} par $x' U_{r1}^{r1} + x s_0 \varepsilon_{q_r}$, U_{r1}^{r2} par $x' U_{r1}^{r2} + x \varepsilon_{q_r}$ et les autres U_{r1}^{ri} par $x U_{r1}^{ri}$, et en faisant des changements analogues dans les parties de α' relatives aux autres racines caractéristiques ; $\alpha\alpha'$ se déduit de α' en remplaçant U_{r1}^{r1} par $s_0 U_{r1}^{r1}$, U_{r1}^{ri} pour $i > 1$ par $s_0 U_{r1}^{ri} + U_{r1}^{ri-1}$, et en faisant des changements analogues dans les autres parties de α'.

On peut maintenant canoniser U_{r1}^{r1} en transformant α' par une

---

(1) Ce théorème a été établi autrement par M. Bromwich [*P. C. P. S.*, t. XI, p. 75 (1901)].

substitution permutable à α. Supposons cette transformation effectuée. Écrivons ρ_1 pour s_0, et soit ρ'_1 un multiplicateur de U_{r1}^{r1}. Soient $(\rho'_1 - s)^{m'_1}$, ζ^{μ_1} les premiers diviseurs élémentaires respectifs de $\alpha' - s\varepsilon$, $x'\alpha' + x\alpha = s\varepsilon$ relativement aux bases $\rho'_1 - s$, $x'\rho'_1 + x\rho_1 - s = \zeta$, et supposons $m'_1 \geqq m_1$; μ_1 est une fonction de x et de x' dont je désignerai le maximum par μ_1^0. Soit y'_{jh} la fonction que $x'\alpha' + x\alpha - s\varepsilon$ substitue à y_{jh}, et résolvons directement par rapport aux y_{jh} les équations qui les lient aux y'_{jh}. On peut évidemment exprimer d'abord directement et immédiatement les y_{jh} où $Q_{r-1} < j \leqq Q_r$, h étant fixe, par les y'_{jh} de mêmes indices, les $y_{j'h'}$ où $j' \leqq Q_r$ avec $h' \leqq h$ et les $y_{j'h'}$ où $Q_{r-1} < j' \leqq Q_r$ avec $h' < h$: je dirai que c'est la *première expression* de ces y_{jh}. Formons la première expression des y_{j1}, puis celle des y_{j2}, ..., en prenant, pour chaque valeur de h, d'abord la première expression des y_{jh} où $j \leqq Q_1$, puis celle des y_{jh} où $Q_1 < j \leqq Q_2$, ... En substituant chacune de ces premières expressions dans les suivantes, la résolution sera achevée et elle fournira μ_1^0.

Pour indiquer la marche des calculs, commençons à former la première expression des y_{jh} où $Q_{r-1} < j \leqq Q_r$. Soit e_r l'exposant du premier diviseur élémentaire de $U_{r1}^{r1} - s\varepsilon_{q_r}$ relatif à ρ'_1. Écrivons z_{jh}, z'_{jh}, $\upsilon_{jh}^{j'h'}$ pour $y_{Q_{r-1}+j,h}$, $y'_{Q_{r-1}+j,h}$, $x' u_{Q_{r-1}+j,h}^{Q_{r-1}+j',h'} + x\varepsilon_{ih}^{i'h'}$ ($\varepsilon_{j1}^{j2} = 1$, tous les autres ε étant nuls). Le coefficient de z'_{11} est ζ^{-1} dans z_{11}, $-x'\zeta^{-2}$ dans z_{21}, ..., $(-x')^{e_r-1}\zeta^{-e_r}$ dans z_{e_r1}. Si $\upsilon_{e_r1}^{12} \neq 0$, il est $(-x')^{e_r}\zeta^{-e_r-1}\upsilon_{e_r1}^{12}$ dans z_{12}, ..., $(-x')^{2e_r-1}\zeta^{-2e_r}\upsilon_{e_r1}^{12}$ dans z_{e_r2}. Soit généralement k_r le plus petit nombre pour lequel, dans la matrice formée des e_r premières lignes et colonnes de la matrice des $\upsilon_{j1}^{j'2}$, la diagonale qui contient $\upsilon_{e_r2}^{k_r2}$ a un élément $\upsilon \neq 0$ (υ_{11}^{12} est $\neq 0$; donc $k_r \leqq e_r$); le coefficient de z'_{11} dans z_{e_r2} est $(-x')^{2e_r-k_r}\zeta^{-2e_r+k_r-1}\upsilon$ ..., dans $z_{e_rm_{Q_r}}$ il sera, en posant $m_{Q_r}e_r - (m_{Q_r} - 1)(k_r - 1) = E_r$, $(-x')^{E_r-1}\zeta^{-E_r}\upsilon$. Supposons les suites relatives à ρ'_1 dans U_{r1}^{r1} (considérée comme une substitution) rangées dans un ordre tel que E_r n'aille jamais en décroissant. Si ρ'_1 n'est multiplicateur que d'un seul U_{r1}^{r1} (que je désignerai par U_{r1}^{r1}), $-E_r$ sera la plus basse puissance de ζ figurant dans les coefficients, c'est-à-dire que $\mu_1^0 = E_r$: si alors $k_r < e_r$, il est clair que $\mu_1^0 = m'_1$; si $k_r = e_r$, $\mu_1^0 = m_{Q_r} + e_r - 1$, et la méthode précédente montre (en faisant $x = n$) que $m'_1 = e_r$ pour $u_{Q_{r-1}+1,1}^{Q_{r-1}+1,2} = 0$, et que $m'_1 = m_{Q_r} + e_r - 1$,

pour $u^{\theta_{r-1}+1,2}_{\theta_{r-1}+1,1} \neq 0$. Si ρ'_1 est multiplicateur de plusieurs $U^{r_1}_{r_1}$, on peut employer la même méthode; mais la présence des v^i_r correspondant à ces $U^{r_1}_{r_1}$ oblige à une discussion plus compliquée, si l'on veut obtenir μ^0_1. Il suffira d'observer que μ^0_1 *est toujours* $\geqq m'_1$: on le voit de suite en continuant les mêmes calculs et en les faisant parallèlement pour le cas $x = 0$.

En faisant parallèlement sur $\alpha^\theta \alpha' - s\varepsilon (\theta = \pm 1)$ les mêmes opérations que sur $x'\alpha' + x\alpha - s\varepsilon$, et en observant que les diagonales analogues à celle considérée tout à l'heure ne renferment plus le paramètre variable x, on voit de suite que *le premier diviseur élémentaire de* $\alpha^\theta \alpha' - s\varepsilon$ *relatif à la base* $\rho^\theta_1 \rho'_1 - s$ *a un exposant* $\leqq \mu^0_1$.

On déduit aisément de là que *le premier diviseur élémentaire relatif à la base* $f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)$ *dans* $f(\alpha, \alpha', \ldots) - s\varepsilon$, f *étant une fonction rationnelle, a un exposant* $\mu_{f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)}$ *au plus égal à* $\mu_{x\rho_i + x'\rho'_i + \ldots}$, *si les* x *restent arbitraires.* Il suffit évidemment de l'établir pour $f(\alpha, \ldots) = a\alpha'' + b\alpha\alpha'$ (a et b étant $\neq 0$). Or, si [en disant pour abréger que $\mu_{f(\rho_i, \ldots)}$ est *l'exposant* de $f(\alpha, \ldots)$] l'exposant de $a\alpha'' + b\alpha\alpha'$ était supérieur à celui de $x''\alpha'' + x'\alpha' + x\alpha$, celui de la combinaison linéaire $x'' b\alpha\alpha' - a(x'\alpha' + x\alpha)$ de ces deux matrices serait supérieur à celui de $x'\alpha' + x\alpha$ (qui est au plus égal à celui de $x''\alpha'' + x'\alpha' + a\alpha$). Donc celui de la combinaison linéaire (à coefficients $\neq 0$) $x'' b\alpha\alpha'$ de ces deux dernières matrices serait supérieur à celui de $x'\alpha' + x\alpha$, ce qui ne se peut. *Si donc le polynome de moindre degré annulé par* $x\alpha + x'\alpha' + \ldots$ *est* $\Pi^q_1 (s - x\rho_i + x'\rho'_i + \ldots)^{\lambda_i}$, *les* $x\rho_i + x'\rho'_i, \ldots$ *désignant ici des racines distinctes,* $f(\alpha, \alpha', \ldots)$ *annulera* $\Pi^q_1 [s - f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)^{\lambda_i}]$ (¹)

9. Voici quelques applications des théorèmes établis aux nos 6-8. Soit α une matrice alternée d'ordre n. $\bar{\alpha} = -\alpha$ est permutable à α. Soit $\bar{\rho}_i$ le multiplicateur de $\bar{\alpha}$ qui *correspond* au multiplicateur ρ de α. Les multiplicateurs $\rho_i + \bar{\rho}_i$ de $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ sont nuls. Donc les multiplicateurs de α (qui sont ceux de $\bar{\alpha}$) sont deux à deux égaux et de signes contraires. Si donc α est réelle, ils sont ou réels ou

(¹) Ce théorème a été établi nettement par M. Schur pour le cas où f est un polynome (*S. A. B.*, 1902, p. 120-125).

purement imaginaires; comme $|s\varepsilon - \alpha|$ est alors de la forme $\Sigma c_i s^{n-2i}\left[i = 0, \ldots, E\left(\frac{n}{2}\right); c_0 = 1\right]$, tous les coefficients étant positifs (d'après les propriétés connues des déterminants gauches), ils ne peuvent être réels $\neq 0$; *ils sont donc purement imaginaires ou nuls.*

Avant de compléter ce résultat, considérons encore une matrice orthogonale α d'ordre n. $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ est permutable à α, et les multiplicateurs de $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$ coïncident avec ceux de α. Soit $\bar{\rho_i}$ le multiplicateur de $\bar{\alpha}$ qui correspond au multiplicateur ρ_i de α. Les multiplicateurs de $\bar{\alpha}\alpha = \varepsilon$ sont $\bar{\rho_i}\rho_i = 1$. Donc $\bar{\rho_i} = \rho_i^{-1}$, et les multiplicateurs de $\alpha + \theta\bar{\alpha}(\theta = \pm 1)$ sont $\rho_i + \theta\rho_i^{-1}$. Mais $\alpha + \bar{\alpha}$ est symétrique et $\alpha - \bar{\alpha}$ alternée. Si donc α est réelle, $\rho_i + \rho_i^{-1}$ est réel (4), et $\rho_i - \rho_i^{-1}$ a sa partie réelle nulle. *Donc* $|\rho_i| = 1$. Soit $A = \xi\alpha\xi^{-1}$ la forme canonique de α et $A' = \xi\bar{\alpha}\xi^{-1}$. A' est permutable à A, et l'équation $AA' = \varepsilon$ montre, d'après la forme générale des matières permutables à A (6), que A *est monome.*

Revenons maintenant au cas d'une matrice α alternée, réelle, d'ordre n. On voit directement que $\beta = \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha + \varepsilon}$ est orthogonale et réelle ($|\alpha + \varepsilon|$ est $\neq 0$). Or la fonction $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est régulière et $\neq 0$ ainsi que $\varphi'(x)$ aux environs des racines (toutes imaginaires ou nulles) de $|\alpha - s\varepsilon|$. Donc les diviseurs élémentaires de $\beta = \varphi(\alpha)$ ont les mêmes exposants que ceux de α (7). *Donc les diviseurs élémentaires de α sont simples.*

10. Soit $a_h (h = 1, 2, \ldots; a_1 = a)$ une matrice d'ordre n. Formons les $\binom{n}{r} = N$ combinaisons de n objets r à r, et numérotons-les dans un ordre quelconque (indépendant de ces objets). Soit A_{ik}^h le déterminant des éléments communs à la $i^{\text{ième}}$ combinaison des lignes et à la $k^{\text{ième}}$ combinaison des colonnes de a_h, et $A_h (A_1 = A)$ la matrice des A_{ik}^n. Les multiplicateurs de A_h sont évidemment indépendants de l'ordre des combinaisons adopté.

Si les éléments de a situés au-dessus de la diagonale sont nuls, il en sera de même dans A à la seule condition de ranger les combinaisons $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$ de r lignes ou de r colonnes ($\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dési-

gnant les rangs de ces lignes ou de ces colonnes) dans l'ordre de grandeur des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ lorsqu'on regarde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ comme des chiffres dans un système de numération de base $> n$, en convenant de prendre toujours $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_r$ (*nous adopterons désormais cet ordre*). En effet, considérons $A_{ik} (i < k)$. Soient $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ l'écriture de i dans le système de numération choisi et $\beta_1 \ldots \beta_r$ celle de k; si $\alpha_1 < \beta_1$, la première ligne de A_{ik} est nulle; si $\alpha_t = \beta_t$ pour $t = 1, \ldots, \rho$ et $\alpha_{\rho+1} < \beta_{\rho+1}$, la matrice des éléments de A_{ik} communs aux lignes de rangs $1, \ldots, \rho + 1$ et aux colonnes de rangs $\rho + 1, \ldots, r$ est nulle, en sorte que tous les mineurs d'ordre $r - \rho$ que l'on peut former dans ces $r - \rho$ dernières colonnes sont nuls. Si par exemple a a la forme canonique, les multiplicateurs de A sont évidemment les produits r à r des n multiplicateurs (distincts ou non) de a. Si $a = \varepsilon_n$, il est clair que $A = \varepsilon_N$.

Si $a_1 \alpha_2 = a_3$, on aura, d'après un théorème connu de Cauchy et Binet sur les déterminants $A_1 A_2 = A_3$ et, si $a_2 = a^{-1}$ (donc $A_3 = \varepsilon_N$), $A_2 = A^{-1}$. Si donc $a_2 = a_3^{-1} a a_3$, on a $A_2 = A_3^{-1} A A_3$. En supposant que a_2 est la forme canonique de a_1, on voit donc que *les multiplicateurs de* A *sont les produits r à r des n multiplicateurs* (*distincts ou non*) *de a* (1).

DÉTERMINATION DES SURFACES QUI ADMETTENT UNE SURFACE MOYENNE DONNÉE;

PAR M. DE MONTCHEUIL.

Nous nous proposons, dans cette étude, de fixer la nature de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème, de rappeler en les complétant et les coordonnant quelques-uns des résultats acquis, et enfin de déterminer une nouvelle catégorie de solutions. Nous essayerons, en effet, de déterminer l'équation qui définit les surfaces admettant un cylindre pour surface moyenne.

---

(1) Ce théorème est dû à M. Rados, qui l'a établi autrement (*M. A.*, t. XLVIII, p. 417; 1897). *Cf.* Stéphanos (*J. M.*, 1900, p. 73).

I. — Formation de l'équation aux dérivées partielles.

Soient X, Y, Z les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque d'une des surfaces cherchées ; x, y, z celles de la surface moyenne supposée donnée ; ρ la demi-somme des rayons de courbure de la première surface.

Cette surface est l'enveloppe du plan

$$(1) \qquad (u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi = 0,$$

ξ désignant une fonction quelconque des variables u, u_1. Si l'on effectue le calcul, on trouve pour expressions des valeurs de x, y, z, ρ [1]

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}[(u+u_1)s - p - q], & z = \frac{1}{2}[(uu_1-1)s - up - u_1 q + \xi], \\ y = \frac{1}{2}[(u_1-u)s - p + q], & \rho = \frac{1}{2}[(uu_1-1)s - up - u_1 q + \xi]. \end{cases}$$

Portons ces expressions de x, y, z dans l'équation donnée de la surface moyenne, et nous obtiendrons une relation en ξ, p, q, s, u, u_1 ; p, q, r, s, t désignant les dérivées premières et secondes de ξ en u et u_1.

Cette équation peut s'écrire

$$\Phi(\xi, p, q, s, u, u_1) = 0.$$

En la supposant résolue par rapport à s, il vient

$$s - f(u, u_1, \xi, p, q) = 0 \quad [2].$$

Ainsi donc, dans le cas général, l'équation cherchée est une équation de Monge et d'Ampère, dont les deux systèmes de caractéristiques peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} du &= 0, & du_1 &= 0, \\ dp - f\,du_1 &= 0, & dq - f\,du &= 0, \\ d\xi - p\,du - q\,du_1 &= 0, & d\xi - p\,du - q\,du_1 &= 0. \end{aligned}$$

---

[1] Thèse de Doctorat, p. 8, Gauthier-Villars, 1902.

[2] Goursat, *Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 50.

On satisfait au premier système, par exemple, en posant

$$u = \text{const.}, \qquad u_1 = \text{const.}, \qquad \xi = \text{const.}, \qquad p = \text{const.}$$

La multiplicité caractéristique formée de ces éléments représente une véritable intégrale, mais qui conduit à un résultat illusoire. On peut alors effectuer la transformation de Legendre définie par les formules

$$u = p', \qquad u_1 = q', \qquad p = u', \qquad q = u'_1, \qquad \xi = p'u' + q'u'_1 - \xi';$$

et l'on trouve

$$s' + (s'^2 - r't')f(p', q', p'u' + q'u'_1 - \xi', u', u'_1) = 0.$$

Cette nouvelle équation admet bien toutes les intégrales de l'équation $q' = \text{const.}$ qui sont de véritables intégrales.

On pourra donc chercher à résoudre cette équation selon le procédé classique par la méthode des caractéristiques.

Mais nous préférons élargir le problème et le présenter sous un aspect nouveau qui nous suggérera des solutions plus étendues que celles développées jusqu'ici.

Rotation d'une surface dans l'espace à quatre dimensions (¹). — La symétrie des quatre expressions définies par le système (2) nous engage à les considérer comme les quatre coordonnées d'un point dans l'espace E_4.

Cette symétrie s'accuse davantage lorsque l'on différentie le système (2) par rapport à u, puis le système des dérivées obtenues, par rapport à u_1. On trouve alors

$$(4) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u_1}}{u + u_1} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial u_1}}{i(u_1 - u)} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial u_1}}{uu_1 - 1} = \frac{\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial u_1}}{uu_1 + 1} = \frac{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial u_1}}{2}.$$

On voit que les quatre premiers numérateurs s'annulent à la fois et que, par conséquent, dans cette hypothèse, les quatre coordonnées x, y, z, ρ sont à la fois définies par une même équation à invariants égaux. Si l'on tient compte de la signification des paramètres u et u_1, on pourra énoncer cette proposition :

Lorsque l'une quelconque des coordonnées de la surface

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903.

moyenne ou encore la demi-somme des rayons de courbure d'une surface est représentée par la somme de deux fonctions respectives des deux paramètres des génératrices rectilignes de la représentation sphérique de cette dernière surface, il en est de même des trois autres quantités.

On peut dire encore :

Quand une combinaison linéaire quelconque des quatre coordonnées x, y, z, ρ de l'espace E_4 est représentée par la somme de deux fonctions respectives des deux paramètres précédemment définis, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires de ces même quantités.

Si l'on considère les coordonnées de l'espace E_4 comme représentées par les quatre quantités x, y, z, $-i\rho$, l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0$$

entraîne les relations

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left[\frac{\partial(i\rho)}{\partial u}\right]^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 + \left[\frac{\partial(i\rho)}{\partial u_1}\right]^2 = 0.$$

Par une analogie naturelle, ces deux relations peuvent être considérées comme définissant les courbes minima de l'espace E_4, et les coordonnées x, y, z, $-i\rho$ de ce même espace peuvent être considérées comme décrivant la surface minima de l'espace E_4 qu'on obtiendra en intégrant l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

On constate que, lorsque cette équation est satisfaite, les quantités x, y, z, $-i\rho$ définies par le système (2) sont liées dans l'espace E_4 par un très grand nombre de relations analogues à celles qui relient les coordonnées x, y, z des surfaces minima dans l'espace E_3. Les surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne et les surfaces imaginaires de Monge rentrent dans cette classe et

fournissent, par conséquent, autant de surfaces minima de l'espace E_4 (¹).

Cette extension à l'espace E_4 de la notion des surfaces et des courbes minima de l'espace E_3 ne contredit en rien une généralisation analogue de cette même notion exposée par Cayley et, après lui, par M. Darboux (²). Le point de vue est différent, mais toujours inspiré par la multiplicité des analogies.

Mais poussons plus loin l'analogie des fonctions x, y, z, $-i\varrho$. Soit une fonction φ_m définie par la relation

$$(4)\quad (u+u_1)a_m + i(u_1-u)b_m + (uu_1-1)c_m + i(uu_1+1)d_m + \varphi_m = 0,$$

a_m, b_m, c_m, id_m désignant autant de constantes; u, u_1 les variables précédemment définies. Cela posé, donnons à l'indice m les quatre valeurs successives 1, 2, 3, 4 de manière à former ainsi quatre fonctions φ_m et seize constantes a_1, b_1, ..., a_2, b_2, etc.

Assujettissons les quatre fonctions φ_m à satisfaire identiquement à la relation

$$(5)\qquad \sum_{m=1}^{m=4} \varphi_m^2 = 0.$$

Un calcul élémentaire montre que cette identité entraîne pour les seize constantes le système

$$(6)\qquad \begin{cases} a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2 = \text{const.}, \\ a_m a_n + b_m b_n + c_m c_n + d_m d_n = 0, \end{cases}$$

m et n désignant toujours l'une des valeurs 1, 2, 3, 4.

Nous ferons la constante qui figure dans le premier groupe des relations (6) égale à l'unité.

Ces préliminaires établis, considérons quatre fonctions θ_m définies par la relation

$$(7)\qquad \theta_m = \frac{1}{2}\left(\varphi_m \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1}\xi\right).$$

Si l'on pose

$$a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 1,$$
$$b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = c_2 = d_2 = a_3 = b_3 = d_3 = a_4 = b_4 = c_4 = 0,$$

(¹) *Voir* Thèse de Doctorat, Gauthier-Villars, 1902.

(²) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. XIV, p. 471.

système de valeurs des constantes qui vérifie les équations (6), il vient

$$\theta_1 = x, \qquad \theta_2 = y, \qquad \theta_3 = z, \qquad \theta_4 = i\rho.$$

Sans entrer dans le détail des calculs du système précédent et du système (7), on déduit aisément que les fonctions θ_m sont des fonctions linéaires des quantités x, y, z, $-i\rho$ et réciproquement. D'ailleurs, les coefficients de ces quantités dans le système (7) vérifient le système (6), c'est-à-dire un système dans l'espace E_4 qui, dans l'espace E_3, serait celui des cosinus directeurs relatifs à la rotation d'un trièdre mobile.

On retrouverait, en effet, ce système en posant

$$a_4 = b_4 = c_4 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0,$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \qquad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0,$$

$$a_3 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \qquad a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0.$$

On retrouve donc bien la rotation de l'espace E_3 comme cas particulier du système (6) relatif à l'espace E_4. Il est donc naturel de considérer le système (6) comme définissant une rotation dans l'espace E_4. Dans cet espace, une surface sera considérée comme déplacée sans déformation, tandis qu'en réalité, considérée dans l'espace E_3, la surface sera à la fois déplacée autour d'un point fixe et déformée.

Les fonctions θ_m définies plus haut vérifient la relation

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial u\, \partial u_1} = \frac{\varphi_m}{2} \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2},$$

et s'annulent, par conséquent, simultanément toutes les fois que l'on a

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

On peut dire, par analogie avec l'espace E_3, que *tout système de coordonnées de l'espace* E_4 *relatif à une surface minima de cet espace décrit un système conjugué sur cette surface quand on choisit les paramètres* u *et* u_1, puisque, en effet, *les quatre*

coordonnées vérifient une même équation aux dérivées partielles, d'ailleurs *à invariants égaux* (¹).

Généralisation du problème. — Nous nous sommes proposé, au début, de déterminer l'ensemble des surfaces qui admettent une surface moyenne donnée

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Nous avons vu que les quantités x, y, z, $-i\rho$ peuvent être considérées comme des fonctions linéaires quelconques de quatre fonctions θ_m vérifiant le système (7).

(¹) Signalons encore une propriété des surfaces minima de l'espace E_4.

M. Raffy, élargissant la notion de réseau isotherme, introduit (*Bull. Soc. math. de France,* t. XXXV, p. 259; 1907) la notion de *réseau isotherme relativement à un réseau donné.* Toutes les fois que deux réseaux de paramètres respectifs (α, β) et (u, v) seront liés par la relation

$$d\alpha\, d\beta = \varphi(u, v)\,(du^2 + dv^2),$$

le réseau de paramètres (u, v) sera dit *isotherme* relativement au réseau de paramètres (α, β), quelle que soit la signification géométrique de ces paramètres.

Entre autres propriétés de ces systèmes de réseaux, l'auteur montre que toute famille de courbes dont l'équation est de la forme

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

appartient à un réseau isotherme relativement au réseau des lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Il indique quelques catégories de familles définies par une équation de cette nature et jouissant par conséquent de la propriété indiquée.

Nous pouvons à notre tour indiquer une catégorie très étendue de familles de courbes définies par une pareille équation. Cet ensemble de courbes s'obtient en égalant à une constante une fonction linéaire à coefficients quelconques des coordonnées des courbes minima tracées sur une surface minima de l'espace E_4.

Il suffit de considérer une quelconque des fonctions θ_m définies par le système (7), où ξ représente la solution la plus générale de l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0.$$

Nous trouvons alors $\theta_m = U + V$. Si donc nous posons $\eta_m = U - V$, il vient

$$d\theta_m\, d\eta_m = dU^2 + [d(iV)]^2,$$

ce qui prouve bien que $\theta_m = \text{const.}$ est une famille de l'espèce considérée.

L'équation (8) pourra donc prendre la forme

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0. \tag{9}$$

Il est vrai que les quatre fonctions θ_m se groupent ici en trois fonctions linéaires représentant les trois quantités x, y, z. Mais rien ne nous empêche de lever cette restriction, et de poser directement une équation en θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 qui, dans le cas particulier, deviendra

$$\psi(x, y, z, -i\rho) = 0. \tag{10}$$

Remplaçant x, y, z, $-i\rho$ par leurs valeurs tirées du système (2), on aura

$$\chi(s, p, q, \xi, u, u_1) = 0. \tag{11}$$

Il est facile d'interpréter l'équation (10). *Elle définit une relation entre les coordonnées de la surface moyenne d'une surface cherchée et la demi-somme des rayons de courbure de celle-ci.*

Nous avons donc bien une généralisation du problème proposé au début. Une fois ξ défini par (11), nous porterons la valeur de ξ et de ses dérivées dans les quatre fonctions θ_m définies par le système (7), et nous obtiendrons ainsi les quatre fonctions θ_m, que nous pourrions à volonté interpréter dans l'espace E_4 ou dans l'espace E_3.

Arête de rebroussement d'une développable isotrope dans l'espace E_4. — Poursuivons les recherches de notre méthode d'extension des propriétés de l'espace E_3 à l'espace E_4.

Soit, dans l'espace E_3, un plan isotrope à un paramètre variable défini par l'équation

$$F = 0.$$

Si nous écrivons le système

$$F = 0, \qquad dF = 0, \qquad d^2F = 0, \tag{12}$$

les différentielles se rapportant au paramètre variable, et les coordonnées étant traitées comme des constantes dans la différentiation, le système (12) définira l'arête de rebroussement de la développable isotrope dans l'espace E_3.

Cela posé, imaginons un plan isotrope de l'espace E_4 à deux paramètres variables. Désignons toujours par $F = 0$ son équation et interprétons le système (12) dans l'espace E_4 d'après les mêmes règles que nous avons adoptées dans l'espace E_3. Nous obtiendrons ainsi un système que nous considérerons comme définissant l'arête de rebroussement de la développable isotrope dans l'espace E_4. Il est bien entendu que nous différentions F en regardant les coordonnées comme constantes et les deux paramètres variables comme indépendants.

Formons d'abord l'équation du plan isotrope dans l'espace E_4. Si nous nous plaçons d'abord dans l'espace E_3, X, Y, Z désignant un point de la surface cherchée, on a, en conservant la notation précédente,

$$X = x + \frac{u + u_1}{1 + uu_1} i\rho, \qquad Y = y + i\frac{u_1 - u}{1 + uu_1} i\rho, \qquad Z = z + \frac{uu_1 - 1}{1 + uu_1} i\rho.$$

Alors l'équation

$$(u + u_1)X + i(u_1 - u)Y + (uu_1 - 1)Z + \xi = 0,$$

qui définit le plan tangent à une surface quelconque de l'espace E_3, prend la forme

$$(13) \quad (u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + i(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0.$$

Telle est l'équation du plan isotrope à deux paramètres variables u, u_1 de l'espace E_4. On vérifie, en effet, que la somme des carrés des coefficients des coordonnées est égale à 0.

Formons donc le système analogue au système (12)

$$F = 0,$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u_1} du_1 = 0,$$

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{d^2 F}{\partial u\, \partial u_1} du\, du_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = 0,$$

u, u_1 étant considérés comme indépendants. On obtient le système

$$(14) \quad \begin{cases} (u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + 1(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0, \\ x - iy + u_1(z + i\rho) + p = 0, \qquad x + iy + u(z + i\rho) + q = 0, \\ z + i\rho + s = 0, \qquad r = 0, \qquad t = 0. \end{cases}$$

On a encore

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} (u+u_1)\,dx + i(u_1-u)\,dy + (uu_1-1)\,dz + i(uu_1+1)\,d\rho &= 0,\\ dx - i\,dy + u_1(dz + i\,d\rho) &= 0,\\ dx + i\,dy + u\,(dz + i\,d\rho) &= 0,\\ dz + i\,d\rho &= 0. \end{aligned}\right.$$

Or, du système (15), on déduit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + d(i\rho)^2 = 0;$$

$x, y, z, -i\rho$ sont donc bien les coordonnées d'une courbe minima de l'espace E_4, courbe dont les coordonnées sont définies par les quatre premières équations du système (14). Vu la manière dont on l'a obtenue, on peut donc bien la considérer comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope de l'espace E_4.

Si nous appelons arête de rebroussement de cet espace un ensemble de points de multiplicité un, nous devons nous contenter de ces quatre premières équations du système (14). Si toutefois nous voulons poursuivre jusqu'au bout l'analogie de la méthode analytique et prendre toutes les équations du système, nous devons y joindre les deux équations

$$r = 0, \qquad t = 0.$$

Or, ces deux équations définissent les points ombilicaux de la surface de coordonnées ξ, u, u_1; surface quelconque dans l'espace E_3; développable isotrope dans l'espace E_4. Ces points ombilicaux sont d'ailleurs des points singuliers situés sur l'arête de rebroussement de cet espace. Ils correspondent donc au point de rebroussement situé sur l'arête de ce nom relative à la développable de l'espace E_3. Ainsi se complète l'analogie. Nous pourrons donc donner cette interprétation de la méthode que nous venons d'exposer: *Les opérations par lesquelles on détermine l'arête de rebroussement de la développable isotrope de l'espace* E_4 *déterminent en même temps les coordonnées de la surface moyenne d'une surface quelconque de l'espace* E_3 *et la demi-somme de ses rayons de courbure. Les points ombilicaux de cette même surface correspondent au point de rebroussement de l'arête de l'espace* E_3.

Généralisons le système (14). Nous pouvons écrire

$$\varphi_1\theta_1+\varphi_2\theta_2+\varphi_3\theta_3+\varphi_4\theta_4+\xi=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\theta_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\theta_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\theta_3+\frac{\partial\varphi_4}{\partial u}\theta_4+p=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\theta_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}\theta_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1}\theta_3+\frac{\partial\varphi_4}{\partial u_1}\theta_4+q=0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\,\partial u_1}\theta_1+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\,\partial u_1}\theta_2+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial u\,\partial u_1}\theta_3+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial u\,\partial u_1}\theta_4+s=0,$$

$$r=0,\qquad t=0.$$

Nous savons qu'on a la relation

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2=0.$$

Si donc on considère θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 comme autant de fonctions linéaires de $x, y, z, -i\rho$, coordonnées de l'espace E_4, le système précédent représentera toujours l'arête de rebroussement du plan isotrope de cet espace et contiendra comme cas particulier le système (14). Celui-ci dérivera de celui-là par une simple rotation.

Transformation de l'équation aux dérivées partielles de la surface moyenne. — Soit comme précédemment l'équation

$$(16)\qquad F(x, y, z, -i\rho)=0,$$

qui définit une relation entre les coordonnées de la surface moyenne et la demi-somme des rayons de courbure. Cette équation, lorsqu'on y remplace x, y, z, $-i\rho$ par leurs expressions définies au moyen du système (2), peut s'écrire

$$(16)'\qquad \Phi(\xi, u, u_1, p, q)=0.$$

Posons

$$u=v,\qquad u_1=-\frac{1}{v_1},\qquad \xi=\frac{\zeta}{v_1}.$$

On tire de là

$$(17)\qquad p=\frac{1}{v_1}\frac{\partial\zeta}{\partial v},\qquad q=v_1\frac{\partial\zeta}{\partial v_1}-\zeta,\qquad s=v_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial v_1}-\frac{\partial\zeta}{\partial v_1}.$$

Si l'on porte ces valeurs de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ dans le système (2), on retrouve les mêmes quantités $x, y, z, -i\rho$, mais permutées entre elles à un coefficient près, x_1, y_1, z_1 désignant

les nouvelles quantités analogues aux quantités $x, y, z, -i\rho$. Il vient

$$x_1 = -z, \qquad y_1 = i\rho, \qquad z_1 = x, \qquad \rho_1 = -iy;$$

et (16) devient

$$F(z_1, -i\rho_1, -x_1, -iy_1) = 0. \tag{18}$$

Ainsi l'équation (16) a été transformée en l'équation (18).

Donnons un exemple. Supposons que $-i\rho$ ne figure pas dans (16): par le fait même, en vertu de la relation $y_1 = i\rho$, y_1 ne figurera pas dans (10). Par suite, les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F(z_1 - i\rho_1 - x_1) = 0$$

seront équivalentes.

Supposons, par exemple, que les quantités x, z entrent dans la première par l'unique expression $x^2 + z^2$, les deux équations peuvent s'écrire

$$\Psi(x^2 + y^2, y) = 0, \qquad \Psi(x_1^2 + y_1^2, -i\rho_1) = 0.$$

La première équation peut se traduire ainsi : *Déterminer les surfaces qui admettent pour surface moyenne une surface de révolution.* Si donc on trouve une solution de cette équation, on obtiendra une solution du problème suivant : *Déterminer les surfaces telles que la demi-somme de leurs rayons de courbure soit fonction de la projection sur un plan fixe du rayon vecteur de la surface moyenne.* Or, nous savons déterminer des surfaces résolvant le premier problème [1]. Il est vrai, ces surfaces se réduisent aux surfaces de révolution, mais il n'en sera pas de même, comme on le vérifie immédiatement, des surfaces qui satisfont à l'équation transformée. Nous nous dispensons de développer les calculs.

II. — Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

Nous venons de le voir, dans le cas le plus général l'équation à résoudre renferme quatre fonctions θ_m.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIII, 1905.

Pour procéder avec ordre, nous allons commencer par le cas où cette équation ne contient qu'une fonction θ_m.

L'équation ne renferme qu'une fonction θ_m. On a donc

$$F(\theta) = 0.$$

On tire de là

$$\theta = \text{const.},$$

c'est-à-dire, d'après le système (7),

$$2\theta = \varphi s - \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} p - \frac{\partial\varphi}{\partial u} q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}\xi = K = \text{const.}$$

On obtient immédiatement la solution générale de cette équation. Il vient

$$\xi = (U' + U_1')\varphi - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u} U - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} U_1 + \frac{K}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}},$$

U, U_1 désignant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1, U', U_1' désignant leurs dérivées.

Rappelons que φ est ici défini par la relation

$$(u + u_1)a + i(u_1 - u)b + (uu - 1)c + i(uu_1 + 1)d + \varphi = 0.$$

Si l'on porte la valeur trouvée ξ et celles que l'on obtient pour ses dérivées dans les quatre fonctions linéaires de $x, y, z, -i\rho$, il vient

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2\theta_m = {} & \left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right) U'' - \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right) U' \\ & + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right) U + \left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right) U_1'' \\ & - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right) U_1' + \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right) U_1 + \frac{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}} K. \end{aligned}\right.$$

Si, dans l'équation (19), on supprime l'indice m, on retrouve l'équation aux dérivées partielles à résoudre

$$2\theta = K.$$

Sans restreindre la généralité de l'équation, on peut la ramener à la forme

$$\theta = az + c\rho = 0.$$

Sous cette forme elle définit les surfaces telles que le rapport des distances d'un point quelconque de leur surface moyenne, d'une part à un plan fixe, de l'autre à la surface cherchée, ait une valeur constante.

Selon que a ou c seront égaux à o, l'équation définira une surface minima, ou l'ensemble des surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne.

On vérifie que les fonctions θ_m représentent la somme de deux fonctions, l'une de u, l'autre de u_1. Des résultats précédents on peut déduire la proposition suivante :

L'ensemble des surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne est formé des surfaces de translation engendrées par deux courbes ayant pour paramètres respectifs les génératrices rectilignes de la représentation sphérique des surfaces cherchées.

Nous venons d'intégrer l'équation

$$\theta = \text{const.},$$

et nous en avons déduit

$$\theta_m = V + V_1,$$

V, V_1 désignant deux fonctions respectives de u et de u_1. Nous pouvons prendre cette nouvelle équation aux dérivées partielles comme point de départ et chercher à l'intégrer. On a

$$(20) \qquad 2\theta = \varphi s - \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} p - \frac{\partial \varphi}{\partial u} q + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial u_1} \xi = 2(V + V_1).$$

On tire de là

$$2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial u_1} = \varphi \frac{\partial^2 s}{\partial u \, \partial u_1} = \varphi \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \, \partial u_1^2} = 0,$$

d'où

$$(21) \qquad \xi = M u_1 + M_1 u + N + N_1,$$

M, N désignant deux fonctions de u; M_1, N_1, deux fonctions de u_1.

Si l'on prend pour point de départ l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \, \partial u_1^2} = 0,$$

on retrouve les surfaces minima de l'espace E_4 dont nous nous sommes déjà occupés. Les quatre fonctions M, N, M_1, N_1 sont alors complètement arbitraires.

Il vient

$$2\theta_m = \left(\varphi_m - u_1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1}\right) M' + \left(u_1 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u}\right) M - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} N' - \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1} N$$
$$+ \left(\varphi_m - u \frac{\partial \varphi_m}{\partial u}\right) M'_1 + \left(u \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1}\right) M_1 - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u} N'_1 - \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1} N_1.$$

Nous pouvons généraliser encore l'équation précédente et écrire

$$(22) \qquad 2\theta = \varphi s - \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} p - \frac{\partial \varphi}{\partial u} q + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial u_1} \xi = F(u, u_1),$$

F désignant une fonction quelconque de u, u_1.

Différentiant, il vient

$$\varphi \frac{\partial^2 s}{\partial u\, \partial u_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial u_1},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u\, \partial u_1} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial u_1}.$$

On obtiendra ξ par quatre quadratures. Nous pouvons donc formuler cette proposition :

L'équation qu'on obtient en égalant, à une fonction quelconque des paramètres des génératrices rectilignes de la représentation sphérique d'une surface, une fonction linéaire quelconque des coordonnées de sa surface moyenne et de la demi-somme des rayons de courbure s'intègre au moyen de quatre quadratures.

L'équation renferme deux fonctions θ_m. — Lorsque θ_1, θ_2 figurent deux coordonnées de la surface moyenne, cette équation représente un cylindre. Dans le cas général où ces fonctions sont des combinaisons linéaires quelconques des quantités x, y, z, $-i\rho$, elle ne se restreint pas nécessairement aux seuls cylindres. Nous lui conserverons cependant le même nom. Nous allons chercher un mode de solutions particulier à cette équation.

De la relation

$$(23) \qquad F(\theta_1, \theta_2) = 0$$

on tire

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \theta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial \theta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} = 0,$$

d'où

$$(24) \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \theta_1}{\partial u_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = 0.$$

Or, on a

$$2\theta_m = \varphi_m s - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u} q + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial u\, \partial u_1} \xi.$$

Différentiant et portant les valeurs trouvées dans l'équation (24), il vient

$$(25) \quad \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial(\log r)}{\partial u_1} + \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right)\frac{\partial \log t}{\partial u} + \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_1)}{\partial(u, u_1)} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial(\log r)}{\partial u_1} + \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right)\frac{\partial(\log t)}{\partial u}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right) = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\log\left(\dfrac{t}{\sqrt{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}}\right)}{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}\right] = \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\left(\dfrac{r}{\sqrt{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}}\right)}{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}\right].$$

On remarquera que les dénominateurs de l'expression précédente sont deux polynomes respectifs de u_1 et de u tous deux du second degré.

Nous pourrons poser

$$(26) \quad \begin{cases} \log\left(\dfrac{t}{\sqrt{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}}\right) = \left(\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right)\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \\[2ex] \log\left(\dfrac{r}{\sqrt{\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}}\right) = \left(\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right)\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}. \end{cases}$$

En égalant les quantités

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2},$$

on obtiendra une équation aux dérivées partielles pour Φ.

D'autre part, nous pouvons remarquer que nous avons l'équation $F(\theta_1, \theta_2) = 0$, équation en ξ, p, q, s, qu'on pourra rapprocher de l'équation (25). Nous avons donc à déterminer les solutions communes à ces deux équations. C'est au moyen de ces équations que nous chercherons à achever le problème.

Application. — Sans chercher à résoudre le problème dans sa généralité, nous nous bornerons à l'étude de la question suivante :

Déterminer les surfaces enveloppes de sphères passant par un point fixe qui admettent pour surface moyenne un cylindre lieu du centre de ces sphères.

Nous savons [1] que les enveloppes de sphères passant toutes par un point fixe et jouissant de la propriété indiquée sont définies par l'équation

$$\xi s - pq = 0.$$

Intégrant, il vient

$$\xi = UU_1,$$

U, U_1 désignant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1.

Prenons donc une fonction ξ de cette forme et cherchons à déterminer U, U_1 de telle sorte que l'équation (25) soit vérifiée.

Les calculs effectués, il vient

$$\xi = e^W \sqrt{\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}} \sqrt{\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}},$$

en posant

$$W = ik \int \frac{du_1}{\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}} + ik_1 \int \frac{du}{\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}$$

et représentant par k, k_1 des constantes égales et de signes contraires.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 22.

Posons

$$\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\psi_1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}}, \qquad \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} = \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial u}}.$$

Il viendra

$$(27) \qquad \xi = \frac{\psi^{ik_1+\frac{1}{2}} \psi_1^{ik+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}}}.$$

Lorsque les deux trinomes en φ_1, φ_2 se réduiront au premier degré on aura

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} = \text{const.},$$

et l'on pourra écrire

$$\xi = \psi^{ik_1+\frac{1}{2}} \psi_1^{ik+\frac{1}{2}}.$$

Nous allons nous borner à considérer ce dernier cas.

Choisissons une série de constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; $\mu_1, \ldots$, telles qu'on ait

$$\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4 = \psi s - \frac{\partial \psi}{\partial u} q,$$

$$\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \mu_3 \theta_3 + \mu_4 \theta_4 = \psi_1 s - \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} p.$$

On trouve d'ailleurs, en remplaçant p, q, s par leurs valeurs,

$$\psi s - \frac{\partial \psi}{\partial u} q = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \psi^{\frac{1}{2}-ik} \psi_1^{ik-\frac{1}{2}},$$

$$\psi_1 s - \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} p = -\left(\frac{1}{2} - k\right)^2 \psi^{\frac{1}{2}-ik} \psi_1^{ik+\frac{1}{2}};$$

d'où

$$(\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4)^{ik+\frac{1}{2}} (\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \mu_3 \theta_3 + \mu_4 \theta_4)^{\frac{1}{2}-ik} = \text{const.},$$

$$(28) \quad \sqrt{(\lambda_1 \theta_1 + \ldots + \lambda_4 \theta_4)(\mu_1 \theta_1 + \ldots + \mu_4 \theta_4)} \left(\frac{\lambda_1 \theta_1 + \ldots}{\mu_1 \theta_1 + \ldots}\right)^{ik} = \text{const.}$$

Le premier membre étant fonction de deux combinaisons linéaires seulement de fonctions θ_m, nous pourrons, d'après ce que nous avons dit, considérer cette équation comme définissant un cylindre, et, dans ce sens, nous pourrons dire *qu'on obtient une surface ayant pour surface moyenne le cylindre déterminé par*

l'équation (28) *en prenant l'enveloppe d'une sphère variable passant par l'origine et dont le centre décrit ce cylindre.*

Cinq fonctions θ étant toujours liées par une relation linéaire, nous pourrons toujours écrire, sans restreindre la généralité du problème,

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots = \theta_5 + i\theta_6,$$
$$\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \ldots = \theta_5 - i\theta_6.$$

L'équation (28) devient alors

$$\sqrt{(\theta_5^2 + \theta_6^2)}\left(\frac{\theta_5 + i\theta_6}{\theta_5 - i\theta_6}\right)^{ik} = \text{const.}$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\psi = u, \qquad \psi_1 = u_1,$$

il vient

$$\xi = u^{ik_1 + \frac{1}{2}} u^{ik + \frac{1}{2}}.$$

Désignant par X, Y, Z les coordonnées cartésiennes de la surface, on trouve

$$\sqrt{(X^2 + Y^2)}\left(\frac{X - iY}{X + iY}\right)^{ik} = \text{const.}, \qquad Z = 0.$$

La surface se réduit donc à une spirale logarithmique, tracée sur le plan des xy. La surface moyenne se réduit à un cylindre proprement dit, qui a pour base une spirale logarithmique définie par l'équation $r = ae^{-2k\theta}$.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SURFACES CERCLÉES;

PAR M. BARRÉ.

Dans deux Communications insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* les 8 et 29 avril 1907, j'ai défini deux sortes de points centraux sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire, savoir les points centraux de première espèce et ceux de seconde espèce, et j'ai fait observer que ces définitions s'appliquaient aux surfaces cerclées. Le Mémoire actuel a pour

objet le développement des indications contenues dans les Notes précitées au sujet de ces dernières surfaces.

1. *Définitions.* — J'appelle *point central de première espèce* sur une surface cerclée tout point d'intersection du cercle générateur avec la caractéristique de son plan. Le lieu de ces points constituera *la ligne de striction de première espèce* de la surface.

Ces points ont été étudiés par M. Demartres dans son Mémoire sur les surfaces cerclées (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1885). En chacun d'eux le plan du cercle touche la surface cerclée, ou encore le cercle générateur rencontre le cercle infiniment voisin.

J'appelle *point central de seconde espèce* sur une surface cerclée tout point pour lequel la distance du cercle générateur au cercle infiniment voisin est stationnaire; en d'autres termes, tout point pour lequel la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des cercles générateurs est nulle. Le lieu de ces points sera *la ligne de striction de seconde espèce.*

2. Ces définitions étant posées, convenons de laisser de côté les surfaces engendrées par des cercles imaginaires dont les plans enveloppent le cercle de l'infini; dans ces conditions, nous pouvons rapporter notre cercle à un système d'axes mobiles dont l'axe des x soit parallèle à la caractéristique de son plan, dont l'origine soit en son centre et dont l'axe des z soit perpendiculaire à son plan.

Désignons par u, v, w les composantes de la translation élémentaire du trièdre mobile suivant les trois axes, et par p, $(q = 0)$ et r celles de sa rotation : u, v, w, p et r dépendent d'un même paramètre t dont dépend également le rayon ρ du cercle. Les équations de celui-ci dans notre système d'axes seront

$$(1) \qquad x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = 0.$$

a. Les points centraux de première espèce [1] sont les intersections du cercle générateur avec la droite représentée dans son plan

[1] Pour établir ce résultat ainsi que le suivant, il suffit de faire $k = 0$ dans les formules générales des Communications précitées. On pourra aussi se reporter au Mémoire de M. Demartres.

par l'équation

$$(2) \qquad w + py = 0.$$

b. Les points centraux de seconde espèce sont les points communs au cercle générateur et à l'hyperbole équilatère passant en son centre et qui a pour équation

$$(3) \qquad (ux + vy + \rho\rho')(vx - uy) + p\rho^2 x(w + py) = 0.$$

Ayant rappelé ces résultats, nous allons résoudre quelques problèmes relatifs aux points centraux :

3. Problème I. — *Trouver les surfaces cerclées dont la ligne de striction de première espèce fait entièrement partie de celle de deuxième espèce.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour toute valeur du paramètre t, toute solution commune à l'équation (2) et à l'équation (4),

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

satisfasse à l'équation (3) ou encore à l'équation

$$(5) \qquad (ux + vy + \rho\rho')(vx - uy) = 0.$$

Ceci peut arriver de quatre manières différentes :

1° La droite représentée par l'équation (2) coïncide avec la droite

$$ux + vy + \rho\rho' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait, pour toute valeur de t,

$$(6) \qquad u = 0, \qquad vw = p\rho\rho'.$$

Ces relations fonctionnelles définissent les *enveloppes de sphères*. La ligne de striction de première espèce se réduit à l'arête de rebroussement de la surface. Celle de seconde espèce comprend, en outre, le lieu engendré par les deux points de la génératrice situés sur le diamètre perpendiculaire à la corde caractéristique du plan du cercle mobile.

2° La droite représentée par l'équation (2) coïncide avec la

droite

$$vx - uy = 0.$$

Ceci entraîne les relations

$$(7) \qquad v = w = 0.$$

On trouve ainsi *les surfaces engendrées par un cercle dont le plan reste osculateur au lieu de son centre.*

Ici la ligne de striction de première espèce est bien une ligne de points pour lesquels le plan tangent à la surface se confond avec le plan de la génératrice. Cette ligne est engendrée par les intersections du cercle mobile avec la tangente au lieu de son centre. La ligne de seconde espèce comprend, en outre, le lieu des points centraux situés sur la corde perpendiculaire à la tangente précédente et dont l'équation est

$$(p^2\rho^2 - u^2)x - u\rho\rho' = 0.$$

Si cette corde est rejetée à l'infini, cette partie de la ligne de striction se réduit au cercle ombilical et, en laissant de côté cette ligne singulière, on peut dire que, dans ce cas, caractérisé par la relation

$$u^2 = p^2\rho^2,$$

il y a coïncidence complète des deux lignes de striction. Nous verrons que ce n'est pas le seul cas où il en soit ainsi; nous reviendrons plus loin sur cette question.

3° L'équation (5) est une identité. On est conduit aux conditions nécessaires et suffisantes

$$(8) \qquad u = v = 0.$$

On trouve ainsi *les surfaces engendrées par un cercle dont le plan se meut normalement au lieu de son centre.*

Si l'on excepte les surfaces canaux qui, d'ailleurs, rentrent dans la série, déjà mentionnée, des enveloppes de sphères, la ligne de striction de première espèce, comme dans le cas précédent, n'est pas une arête de rebroussement. La ligne de seconde espèce se complète par l'adjonction à la première du lieu des extrémités du diamètre perpendiculaire à la caractéristique du plan du cercle générateur.

4° Enfin, et c'est le cas le plus délicat, la droite (2) coupe le cercle en un point appartenant à la droite

$$\rho\rho' + ux + vy = 0, \tag{9}$$

et en un autre point appartenant à la droite

$$vx - uy = 0. \tag{10}$$

Si ces deux points sont distincts, ce qui arrivera toujours quand les droites (2), (9) et (10) ne seront pas concourantes, ces conditions sont suffisantes. Dans le cas contraire, il peut y avoir exception; le second point d'intersection du cercle et de la droite (2) ne coïncidera avec un point de seconde espèce que si cette droite coïncide avec l'une des droites (9) ou (10). Une étude directe s'imposera donc pour lever cette difficulté.

En exprimant que les équations (2), (4) et (9) ont une solution commune, on trouve aisément [1] la condition

$$(p^2\rho^2 - w^2)u^2 - (p\rho\rho' - vw)^2 = 0. \tag{11}$$

C'est la condition pour que le cercle mobile ait une enveloppe. Comme on le savait, d'après le théorème général VIII signalé dans les *Comptes rendus* du 20 mai 1907, on devait trouver cette solution. Le point correspondant décrit une enveloppe du cercle générateur.

En associant les équations (2), (4) et (10) on obtient la condition

$$p^2v^2\rho^2 = w^2(u^2 + v^2). \tag{12}$$

Sous la réserve que les droites (2), (9) et (10) ne soient pas concourantes, ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Développons la relation (11) et remplaçons-y $w^2(u^2 + v^2)$ par sa valeur tirée de l'équation (12). On obtient l'équation

$$2\rho' vw = p\rho(\rho'^2 - u^2 + v^2). \tag{13}$$

Tirant alors w de cette relation et substituant dans l'équa-

---

[1] Je laisse de côté le cas où $p = 0$, c'est-à-dire où le plan du cercle reste parallèle à lui-même. La discussion est alors très simplifiée. Je laisse au lecteur le soin de le faire, me bornant à en énoncer ci-après les résultats.

tion (12), on obtient successivement

$$4v^4\rho'^2 = (u^2+v^2)(\rho'^2-u^2+v^2)^2$$

ou

$$4\rho'^2v^4 = (u^2+v^2)[(u^2+v^2-\rho'^2)-2v^2]^2$$

ou

$$(12\,bis)\qquad (u^2+v^2-\rho'^2)[(u^2+v^2)(u^2+v^2-\rho'^2)-4u^2v^2]=0.$$

Réservant la solution

$$u^2+v^2-\rho'^2=0,$$

on obtient *les surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle défini par les relations*

$$(14)\qquad \begin{cases} 2\rho'vw = p\rho(\rho'^2+v^2-u^2), \\ (u^2+v^2)(u^2+v^2-\rho'^2) = 4u^2v^2. \end{cases}$$

Ce mouvement n'est pas simple et la classe de surfaces ainsi définie ne paraît pas jouir de propriétés particulièrement intéressantes, sauf celle qui fait l'objet de cette étude. Je ne m'arrêterai pas à la définir autrement : toutefois je montrerai qu'elle constitue bien une solution du problème; autrement dit, que l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception signalé.

La condition de concours des trois droites (2), (9) et (10) est

$$(15)\qquad w(u^2+v^2) = pv\rho\rho',$$

qui, rapprochée de l'équation (12), donne la relation [1]

$$(16)\qquad pv\rho = w\rho'.$$

Or la coexistence des conditions (16) et (13) conduit à la relation

$$(17)\qquad u^2+v^2=\rho'^2.$$

C'est la solution réservée de l'équation (12 *bis*). Elle présente le caractère exceptionnel signalé et demande une étude directe sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Cherchons si, parmi les surfaces définies par les équations (14),

---

[1] On laisse de côté l'hypothèse $v=0$, qui conduit à une solution rentrant dans la solution générale.

il n'y en a pas qui présentent ce caractère. En rapprochant l'équation (17) de la seconde des équations (14), on trouve la condition

$$u^2 v^2 = 0.$$

L'hypothèse $v = 0$ rapprochée de la relation (16) donne $\rho' = 0$; d'où, par suite, $u = 0$. On trouve ainsi *les surfaces canaux* déjà rencontrées. On sait qu'elles n'ont rien d'exceptionnel au point de vue de la question actuelle.

L'hypothèse $u = 0$ conduirait de même aux relations

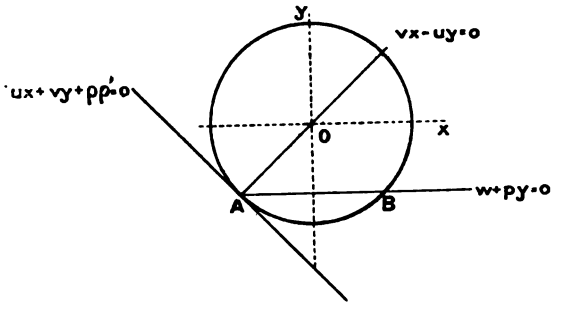
$$v = \rho'\varepsilon, \qquad w = p\rho\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

qui définissent *les surfaces engendrées par le cercle osculateur d'une courbe,* surfaces appartenant à la classe des enveloppes de sphères sans caractère exceptionnel.

Il nous reste à examiner le cas exceptionnel. L'interprétation géométrique en est facile.

La droite (10) est un diamètre (AO) du cercle générateur; la droite (9) est la tangente à une extrémité A de ce diamètre,

Fig. 1.



extrémité par laquelle passe la droite (2) qui coupe le cercle en un second point B. Ce point B est différent de A et, par suite, est bien un point exceptionnel, sauf quand AO est parallèle ou perpendiculaire à la caractéristique. Dans ces deux cas particuliers, on retombe sur les surfaces qui viennent d'être étudiées (surfaces canaux et lieux de cercles osculateurs).

4. Problème II. — *Déterminer les surfaces dont la ligne de*

striction de seconde espèce fait complètement partie de celle de première espèce.

L'intersection de l'hyperbole et du cercle doit se réduire aux deux points d'intersection de ce cercle et de la droite (2) dont l'équation n'est pas une identité.

Cela ne peut arriver que si l'hyperbole touche le cercle en deux points qui sont précisément sur la droite (2). Sans développer de calculs et en ne considérant que les éléments réels, on voit que le fait ne peut se produire ici, l'hyperbole passant au centre du cercle, à moins toutefois que cette hyperbole ne se décompose. Dans tous les cas, d'ailleurs, tous les points d'intersection de la droite (2) et du cercle seront sur l'hyperbole. Donc *les surfaces cherchées seront à coïncidence complète.*

5. Problème III. — *Déterminer les surfaces cerclées dont les deux lignes de striction coïncident complètement.*

L'hyperbole déterminant les points de seconde espèce doit se réduire à deux droites : l'une d'elles sera nécessairement la droite (2), sans quoi la coïncidence complète n'existerait pas.

Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante; car les deux points d'intersection du cercle et de l'autre droite, perpendiculaire à la droite (2), n'appartiennent pas en général à celle-ci. Cela n'arrivera que si cette deuxième droite est tangente à la circonférence, la droite (2) étant le diamètre de son point de contact.

Si l'on fait abstraction d'une branche de ligne de striction confondue avec le cercle de l'infini, on pourra encore ajouter un cas : celui où la seconde droite est la droite de l'infini du plan de la génératrice.

Premier cas. — La droite (2) est un diamètre, donc $w = 0$. La droite $y = 0$ doit faire partie de l'hyperbole (3); or ceci exige soit $v = 0$, soit $u = \rho' = 0$. Mais alors la seconde droite dont se compose l'hyperbole est le diamètre $x = 0$ qui ne réalise pas les conditions imposées (tangence à l'extrémité de $y = 0$).

La double hypothèse

$$w = 0, \qquad v = 0$$

nous donne une surface engendrée par un cercle dont le plan reste

osculateur au lieu de son centre. La seconde droite à laquelle se réduit l'hyperbole est représentée par l'équation, déjà trouvée,

$$(18) \qquad (p^2\rho^2 - u^2)x - u\rho\rho' = 0;$$

elle sera tangente à une extrémité du diamètre $y = 0$ si la droite (18) est à une distance du centre égale en valeur absolue à ρ, ce qui donne la condition

$$u\rho' = \pm(p^2\rho^2 - u^2).$$

Si l'on prend comme variable l'arc du lieu des centres, cette relation devient

$$(19) \qquad \frac{d\rho}{ds} = \pm\left(\frac{\rho^2}{\tau^2} - 1\right),$$

τ désignant le rayon de torsion du lieu des centres.

Deuxième cas. — La seconde droite est la droite de l'infini. Ceci exige la disparition des termes du second degré dans l'équation de l'hyperbole, d'où

$$(20) \qquad p^2\rho^2 + v^2 - u^2 = 0,$$

$$(21) \qquad uv = 0.$$

Si l'on fait abstraction des génératrices imaginaires, on peut, sans aller plus loin, négliger la solution $u = 0$. Il nous restera les conditions

$$v = 0, \qquad p\rho = \pm u.$$

Enfin la condition pour que la droite (2) fasse partie de l'hyperbole donne immédiatement

$$w = 0.$$

Nous écrirons ces conditions en ne conservant qu'un seul signe

$$v = w = 0, \qquad \rho = \tau.$$

On remarquera que, si τ est une constante, il en sera de même de ρ et l'équation de l'hyperbole se réduira à une identité. Ces résultats sont résumés dans la proposition suivante :

Les seules surfaces cerclées dont les lignes de striction des deux espèces coïncident complètement sont celles qu'engendre

un cercle dont le plan est osculateur au lieu des centres et dont le rayon ρ égale le rayon de torsion τ de ce lieu, ou bien est lié à τ par la relation différentielle

$$\frac{d\rho}{ds} = \pm \frac{\rho^2 - \tau^2}{\tau^2},$$

où s désigne l'arc du lieu du centre.

Le cas où le lieu du centre est à torsion constante est particulièrement intéressant. La première série de surfaces ($\rho = \tau$) présente un caractère exceptionnel : *la coïncidence n'est plus complète,* car la ligne de striction de première espèce est bien déterminée et celle de seconde indéterminée. Ce résultat s'explique facilement si l'on remarque que ces surfaces sont précisément celles pour lesquelles les trajectoires orthogonales des cercles générateurs sont des géodésiques, surfaces signalées par M. Demartres dans le Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale,* 1885, p. 151).

6. *Remarque.* — Dans les problèmes précédents, on a laissé de côté le cas où le plan du cercle générateur reste parallèle à un plan fixe. On trouve alors les résultats suivants :

1° *La ligne de striction de première espèce est rejetée à l'infini* (sauf le cas où, le cercle restant dans un plan fixe, cette ligne est alors indéterminée).

2° *La ligne de striction de seconde espèce se compose de quatre branches.* Deux d'entre elles sont engendrées par des points diamétralement opposés du cercle générateur, situés sur un diamètre dont la projection orthogonale sur le plan d'un des cercles mobiles est la tangente à la projection du lieu des centres. Dans chaque position du cercle mobile, les deux autres points centraux sont sur une corde perpendiculaire à ce diamètre.

3° *Si la projection orthogonale du cercle générateur sur un plan parallèle au sien est, dans chacune de ses positions, le cercle osculateur d'une courbe* (c) *du plan de projection, la ligne de striction de seconde espèce se réduit à deux branches, dont une triple.* Cette dernière est la courbe qui se projette suivant la courbe (c). L'autre branche est le lieu des points diamétralement opposés aux points de la branche triple.

Un exemple très simple de ce cas est celui où (c) se réduit à un point : alors le cercle mobile rencontre une droite fixe (Δ) perpendiculaire à la direction de son plan et son centre décrit une droite rencontrant (Δ). La surface correspondante est un cône du second degré dont une génératrice (Δ) est perpendiculaire à un plan de section cyclique : cette génératrice est la branche triple dont il vient d'être question.

7. Pour terminer cet exposé, j'appliquerai aux surfaces cerclées la définition du paramètre de distribution que j'ai donnée [1] pour les surfaces engendrées par une hélice circulaire.

Définition. — Désignant par V l'angle du plan tangent avec le plan du cercle générateur, nous appellerons *paramètre de distribution* en un point d'une génératrice l'expression

$$\frac{\partial \operatorname{tang} V}{\partial \varphi}.$$

Cette expression ne conserve une valeur constante sur chaque génératrice que dans le cas des enveloppes de sphères, et dans ce cas sa valeur est nulle. On a en effet

$$\operatorname{tang} V = \frac{w + p\rho \sin\varphi}{u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'}. \tag{22}$$

Si le paramètre de distribution conserve même valeur sur chaque génératrice, il existe une fonction $f(t)$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial \operatorname{tang} V}{\partial \varphi} = f(t)$$

ou

$$\operatorname{tang} V = \varphi f(t). \tag{23}$$

La comparaison des formules (22) et (23) entraîne $f(t) = 0$. Donc l'angle V sera constant le long de chaque génératrice, propriété caractéristique d'une enveloppe de sphères.

---

[1] *Comptes rendus*, 21 mai 1907, p. 1097.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN UNE SOMME DE PUISSANCES HUITIÈMES D'ENTIERS

(Problème de Waring);

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

On peut se demander, avec Waring, si tout nombre entier N n'est pas, quel que soit N, la somme d'un nombre k, limité et indépendant de N, de puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs. C'est là *une des énigmes historiques de l'Arithmétique,* qu'on peut appeler *problème de Waring,* et qui n'a encore reçu sa solution que pour les petites valeurs de n. On sait que la réponse est affirmative pour $n=2$ ($k \leqq 4$, Fermat, Euler, Lagrange), $n=4$ (J. Liouville), $n=3$ et 5 (E. Maillet), et, comme vient de le montrer [1] M. Albert Fleck, pour $n=6$. Le joli résultat de M. Fleck m'a donné l'idée d'étendre sa méthode, d'une manière convenable, au cas de $n=8$. Les calculs sont assez compliqués, mais enfin ils me permettent d'établir, grâce à des lemmes de Cauchy et de J. Liouville, l'exactitude de l'hypothèse de Waring pour $n=8$.

En terminant, je démontre que $k \geqq n+1$ pour une infinité de valeurs de N : si cette hypothèse est vraie pour une infinité de valeurs de n, k croît indéfiniment avec n.

II.

Soient n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et la somme

$$(1) \qquad 2^{p-1} A_{p-1} = \sum_n (x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_p)^8 \qquad (p \leqq n),$$

obtenue en prenant dans les parenthèses toutes les combinaisons p à p de ces n quantités et additionnant dans chaque combinaison

[1] *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907, p. 561 (où l'on trouve aussi l'historique de la question). J'ai donné un résumé de ma présente Note dans les *Comptes rendus,* 30 décembre 1907.

les p lettres dont $p-1$ ont été affectées des signes $+$ ou $-$ de toutes les manières possibles. Le nombre des termes obtenus dans le second membre de (1) est ainsi $2^{p-1}C_n^p$.

Je développe le second membre de (1). On a, en posant [1]

$$(2)\quad \begin{cases} A_0 = \sum x_1^8, \qquad L = \sum x_1^6 x_2^2, \qquad M = \sum x_1^4 x_2^4, \\ P = \sum x_1^4 x_2^2 x_3^2, \qquad Q = \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2, \end{cases}$$

$$(3)\quad A_{p-1} = C_{n-1}^{p-1} A_0 + C_{n-2}^{p-2}(\lambda L + \mu M) + C_{n-3}^{p-3}\varpi P + C_{n-4}^{p-4}\chi Q,$$

avec

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{8.7}{2}, \qquad \mu = \dfrac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = \dfrac{5}{2}\lambda, \qquad \varpi = \dfrac{8.7.6.5}{4}, \qquad \chi = \dfrac{(8!)}{16}, \\ C_j^0 = 1, \qquad C_j^{-k} = 0 \text{ pour } k > 0. \end{cases}$$

---

[1] La méthode que je suis ici est une extension de la méthode de M. Fleck pour l'exposant 6, laquelle est d'ailleurs elle-même, si l'on veut, une modification et une généralisation des méthodes de Liouville et E. Lucas pour $n = 4$. Si

$$2^{q-1}A'_{q-1} = \sum_n (x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_q)^4, \qquad G' = \left(\sum_n x_1^2\right)^2 \qquad (n \geqq q),$$

on a

$$G' = \frac{1}{3}\frac{A'_{q-1}}{C_{n-2}^{q-2}} + A'_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{n-1}{q-1}\right).$$

Fixant, par exemple, $n \geqq 4$ et q de façon que $\left(1 - \frac{1}{3}\frac{n-1}{q-1}\right)$ soit nul ou positif, on en déduit des décompositions variées d'un carré quelconque $G' = f^2$ sous la forme $f^2 = \frac{\sigma}{\varphi}$, où σ est une somme de bicarrés, φ un entier numérique; tout entier N étant une somme de 4 carrés f^2, on déduit de là une décomposition de φN en une somme de bicarrés, par suite aussi de

$$\varphi N + i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varphi - 1),$$

c'est-à-dire de tout entier, puisque l'unité est un bicarré. En particulier, pour $n = 4$ et $q = 2$,

$$G' = f^2 = \frac{2A'_1}{6},$$

et l'on retrouve une identité connue (E. Lucas, *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, 1878, p. 536; Fleck, *Sitzungsberichte der Berl. math. Gesellschaft*, 28 juin 1905, 2 janvier 1906).

D'autre part, quand $n \geqq 4$,

$$(5)\qquad \begin{cases} G = \left(\sum\limits_n x_1^2\right)^4 = A_0 + 4L + 6M + 12P + 24Q, \\ H = \left(\sum\limits_n x_1^4\right)^2 = A_0 + 2M, \end{cases}$$

$$(6)\qquad G + 2H = 3A_0 + \frac{4}{\lambda}(\lambda L + \mu M) + 12P + 24Q.$$

Le rapprochement des expressions (3) et (6) montre qu'on peut essayer de mettre $G + 2H$ sous la forme

$$(7)\qquad G + 2H = \frac{1}{\lambda\alpha}(\beta_0 A_0 + \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_q A_q)$$

(α entier, $q \leqq n - 1$), où $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q$ sont des nombres *rationnels et positifs* qui ne dépendent que de n et q. Il suffira

$$(8)\qquad \begin{cases} 3\lambda\alpha = \sum\limits_0^q \beta_r C_{n-1}^r, \\ 4\ \alpha = \sum\limits_1^q \beta_r C_{n-2}^{r-1}, \\ 12\lambda\alpha = \varpi \sum\limits_2^q \beta_r C_{n-3}^{r-2}, \\ 24\lambda\alpha = \chi \sum\limits_3^q \beta_r C_{n-4}^{r-3}; \end{cases}$$

on posera

$$\alpha = (n-1)(n-2)\ldots(n-q),$$

$$\beta_r = \gamma_r(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-q).(r!), \qquad \beta_q = \gamma_q.(q!),$$

et les conditions (8) deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} a_0 = 3\lambda = \sum\limits_0^q \gamma_r, \qquad a_1 = 4(n-1) = \sum\limits_1^q \gamma_r r, \\ a_2 = 12\dfrac{\lambda}{\varpi}(n-1)(n-2) = \sum\limits_2^q \gamma_r r(r-1), \\ a_3 = 24\dfrac{\lambda}{\chi}(n-1)(n-2)(n-3) = \sum\limits_3^q \gamma_r r(r-1)(r-2), \end{cases}$$

ou encore

$$\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_q=3.28=a_0,$$
$$\gamma_1+2\gamma_2+3\gamma_3+\ldots+q\gamma_q=4(n-1)=a_1,$$
$$2\gamma_2+3.2\gamma_3+\ldots+q(q-1)\gamma_q=\frac{4}{5}(n-1)(n-2)=a_2,$$
$$3.2.1\gamma_3+\ldots+q(q-1)(q-2)\gamma_q$$
$$=\frac{4}{15}(n-1)(n-2)(n-3)=a_3;$$

on en tire, si

$$\gamma_0=0,\qquad R_r=(r-1)(r-2)(r-3)(r-4),$$

$$6\gamma_1=(\ \ 24a_0-18a_1+6a_2-a_3)+\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-1}=\Gamma_1+\delta_1,$$

$$2\gamma_2=(-12a_0+12a_1-5a_2+a_3)-\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-2}=\Gamma_2+\delta_2,$$

$$2\gamma_3=(\ \ 8a_0-\ 8a_1+4a_2-a_3)+\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-3}=\Gamma_3+\delta_3,$$

$$6\gamma_4=(-\ 6a_0+\ 6a_1-3a_2+a_3)-\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-4}=\Gamma_4+\delta_4,$$

où

$$\delta_i=(-1)^{i-1}\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-i}.$$

Il suffit de disposer de n, q et des $\gamma_5, \ldots, \gamma_q$ pris positifs et rationnels pour que γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 soient positifs.

Si l'on prend $n=51$,

$$\Gamma_1=-21184,\qquad \Gamma_2=22952,\qquad \Gamma_3=-24448,\qquad \Gamma_4=26176.$$

On peut chercher à rendre positives les expressions

$$\Gamma_1+\frac{\omega_1}{r_1-1}+\frac{\omega_2}{r_2-1},\qquad \Gamma_2-\frac{\omega_1}{r_1-2}-\frac{\omega_2}{r_2-2},$$
$$\Gamma_3+\frac{\omega_1}{r_1-3}+\frac{\omega_2}{r_2-3},\qquad \Gamma_4-\frac{\omega_1}{r_1-4}-\frac{\omega_2}{r_2-4},$$

pour des valeurs positives rationnelles de ω_1 et ω_2, avec r_1 et r_2

différents et > 4. On y réussit en prenant [1] $r_1 = 18$, $r_2 = 50$, $\omega_1 = \gamma_{18} R_{18} = 17.21184$, $\omega_2 = \gamma_{50} R_{50} = 47.440$, tous les autres γ_r, avec $r > 4$, étant nuls. D'après (7), (8) et (9), avec ces valeurs numériques on obtient, q étant égal à 50,

$$(10) \qquad G + 2H = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_3 A_3 + \varepsilon_4 A_4 + \varepsilon_{18} A_{18} + \varepsilon_{50} A_{50}),$$

où les ε, ε_i ont des valeurs numériques fixes indépendantes des x_i et sont entiers positifs. On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$\varepsilon_1\,\varepsilon^{-1} = \frac{47.220}{3.28.50.49}, \qquad \varepsilon_2\,\varepsilon^{-1} = \frac{79}{6.28.50.49},$$

$$\varepsilon_3\,\varepsilon^{-1} = \frac{8}{5.28.50.49.48}, \qquad \varepsilon_4\,\varepsilon^{-1} = \frac{16.121}{7.23.28.50.49.48.47},$$

$$\varepsilon_{18}\varepsilon^{-1} = \frac{331.64.18.17.(13!)}{28.(50.49\ldots33)}, \qquad \varepsilon_{50}\varepsilon^{-1} = \frac{440}{49.48.46.28}.$$

L'exactitude de l'identité (10) peut d'ailleurs se vérifier directement à l'aide des relations (3) à (6).

III.

D'autre part, on sait, d'après un lemme de Cauchy [2], rapproché d'un autre lemme de Liouville [3], qu'on peut trouver, l et k étant des nombres impairs positifs donnés quelconques et tels que

$$(11) \qquad \sqrt{3k-2} - 1 < l < \sqrt{4k},$$

θ entiers positifs x_i satisfaisant à

$$6l = \sum_1^\theta x_i^2, \qquad 6k = \sum_1^\theta x_i^4,$$

---

[1] On réussirait également en prenant $r_1 = 18$ et r_2 égal à 39, 40, ... ou 49. On en déduit une série de formules analogues à (10), et de décompositions d'un nombre entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers positifs.

[2] *Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 273, Paris, de Bure, 1826; ou Legendre, *Théorie des nombres*, 3e édition, t. II, p. 338.

[3] Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris, Leiber et Faraguet, 1859, p. 113; E. Maillet, *Bull. Soc. math.*, 1895, p. 46.

où θ peut être pris $\leqq 48$, mais aussi plus grand, *a fortiori*, à condition d'envisager au besoin quelques valeurs nulles des x_i. On pourra poser, par exemple,

$$l = 3m, \qquad k = 3m^2, \qquad 3k = l^2 = 3^2 m^2,$$

où m est un nombre impair absolument quelconque [1]. On aura, en prenant $n = 51$ dans (5), avec ces valeurs de G et H,

$$G = 6^4 l^4 = 6^4 . 3^4 m^4, \qquad H = 6^2 k^2 = 4 . 3^4 m^4,$$
$$G + 2H = 3^4 . 2^3 (1 + 2 . 3^4) m^4.$$

Plus généralement, si $x'_i = 2^t x_i$,

$$2^{2t} . 6l = \sum_1^\theta x'^2_i, \qquad 2^{4t} . 6k = \sum_1^\theta x'^4_i,$$

et, avec ces valeurs de G et H,

$$G = 6^4 . 3^4 . (2^{2t} m)^4, \qquad H = 2^2 . 3^4 . (2^{2t} m)^4,$$
$$G + 2H = 3^4 . 2^3 (1 + 2 . 3^4)(2^{2t} m)^4,$$

ou

$$G + 2H = 3^4 . 2^7 (1 + 2 . 3^4)(2^{2t-1} m)^4.$$

Tout nombre entier N étant d'une des formes m, $2^{2t} m$, $2^{2t-1} m$, il en résulte que toute puissance quatrième d'un entier est de la forme

$$\frac{G + 2H}{\varphi},$$

où φ est un entier numérique indépendant de N et qui divise

$$3^4 . 2^7 (1 + 2 . 3^4) = \psi.$$

Or, on sait [2] que tout entier E est la somme d'un nombre limité de bicarrés. Donc ψE peut se mettre sous la forme d'une somme d'un nombre limité de quantités $G + 2H$ et, d'après (1) et (10), $2^{50} \varepsilon \psi E$ est une somme de quantités $2A_1$, $2^2 A_2$, ..., c'est-à-dire une somme de puissances huitièmes d'entiers dont le nombre est

---

(1) (11) a alors lieu *quel que soit le nombre impair m.*

(2) *Voir* Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, p. 113, et, pour l'historique, A Fleck, *loc. cit.*, E. Landau, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXXIII, 1907 (9 décembre 1906).

limité numériquement et indépendamment de E. L'unité étant une puissance huitième d'entier positif, il en est de même de

$$2^{50}\varepsilon\psi E + i, \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ou

$$2^{50}\varepsilon\psi - 1,$$

c'est-à-dire que :

Tout nombre entier positif N *est la somme arithmétique d'un nombre limité indépendamment de* N *de puissances huitièmes de nombres entiers.* C. Q. F. D.

IV.

En admettant que pour une infinité de valeurs de n l'hypothèse de Waring soit exacte et que tout nombre N supérieur à ν soit la somme d'au plus k puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs, *on peut montrer que k croît indéfiniment avec n pour une infinité de valeurs de* N.

Soit

$$(12) \qquad N \geqq x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n;$$

on a évidemment

$$x_l^n \leqq N, \qquad x_l \leqq E\left(N^{\frac{1}{n}}\right) = N_1.$$

Or, le nombre des nombres qu'on peut former en additionnant k des nombres $0, 1^n, 2^n, \ldots, N_1^n$ est au plus égal au nombre $D_{N_1}^k$ des combinaisons avec répétitions de ces $N_1 + 1$ nombres k à k, c'est-à-dire à

$$\frac{(N_1+1)(N_1+2)\ldots(N_1+k)}{k!} \leqq \frac{(N_1+k)^k}{k!}.$$

Pour qu'on puisse former tout nombre $\leqq N$ et $> \nu$ à l'aide du second membre de (12) il faudra

$$\frac{(N_1+k)^k}{k!} \geqq N - \nu.$$

Ceci sera impossible si

$$\frac{(N_1+k)^k}{k!} < N - \nu,$$

ou, *a fortiori,* si N étant assez grand,

$$\nu + \frac{(N_1 + k)^k}{k!} < \nu + \frac{\left(N^{\frac{1}{n}} + k\right)^k}{k!} < \left(N^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Posant $N^{\frac{1}{n}} = m$, il suffit, pour m assez grand,

$$m^n - \nu - \frac{(m+k)^k}{k!} > 0,$$

ce qui a lieu évidemment quand $2 \leqq k \leqq n$. Donc, si l'hypothèse de Waring est exacte pour une valeur de n, il faut $k \geqq n + 1$, c'est-à-dire que k croît indéfiniment avec n, si cette hypothèse est vraie pour une infinité de valeurs de n. C. Q. F. D.

Remarque. — Quand $N = 2^n - 1, 2.2^n - 1, \ldots, r.2^n - 1 < 3^n$ et $N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n$, il faut évidemment $k \geqq 2^n - 1$. Mais cette remarque ne prouve rien pour les grandes valeurs de N, n étant donné.

V.

En terminant, je ne crois pas inutile de rappeler ici les récents résultats relatifs au problème de Waring : a-t-on

$$N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n,$$

quel que soit n? Pour $n = 3$, j'avais trouvé antérieurement qu'il suffit $k \leqq 17$: M. Fleck (¹) a établi, par une remarque additionnelle très simple à ma démonstration, qu'il suffit $k \leqq 13$. Pour $n = 4$, M. Fleck (²) a montré qu'il suffit $k \leqq 39$, et M. E. Landau (³) est arrivé à $k \leqq 38$. Enfin, pour $n = 6$, M. Fleck obtient $k \leqq 2451$: il s'appuie sur l'identité

$$\begin{aligned} 60n^3 &= 60(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3 \\ &= \sum_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^6 + 2\sum_4 (x_1 \pm x_2)^6 + 36\sum_4 x_1^6. \end{aligned}$$

(¹) *Sitzungsberichte der Berl. math. Gesellschaft, loc. cit.*
(²) *Id.*
(³) *Loc. cit.*

A ce propos, il ne sera pas sans intérêt de remarquer qu'on a en même temps

$$\begin{aligned} 60n &= 60(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &= \sum_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2 + 2\sum_1 (x_1 \pm x_2)^2 + 36 \sum_4 x_i^6. \end{aligned}$$

Il est donc toujours possible, E étant un entier quelconque, de satisfaire à la fois aux deux équations en nombres entiers

$$60E^3 = \sum_1^p y_i^6, \qquad 60E = \sum_1^p y_i^2, \qquad \text{où} \qquad p \geqq 184.$$

SUR L'EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE BESSEL;

PAR M. HADAMARD.

On sait que la fonction de Bessel

$$(1) \qquad J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots$$

et la fonction

$$(1') \qquad J_0(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots,$$

qui s'en déduit par le changement de x en ix, admettent des développements formels qui en font connaître les valeurs asymptotiques pour x très grand, mais qui sont divergents.

Il existe, comme j'avais eu l'occasion de le constater précédemment [1], un moyen de rendre ces développements convergents. Il consiste à ajouter aux termes successifs des parties correctives dont chacune est sans influence sur la valeur asymptotique du

---

[1] *Transactions of the American math. Society*, t. III, octobre 1902, p. 421-422.

résultat, mais qui, par leur ensemble, rétablissent la convergence de la série.

C'est la méthode bien connue par laquelle on parvient aux développements donnés par M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes présentant des singularités polaires ou essentielles en nombre infini [1].

Je ne sais s'il a été remarqué que ces séries convergentes peuvent être obtenues d'une manière effective pour les fonctions (1) et (1'). Du moins pourrons-nous les écrire en y laissant subsister une intégrale définie; mais celle-ci est infiniment petite par rapport à toutes les erreurs commises, de sorte que les séries ainsi formées présentent bien la double propriété :

1° De converger et de fournir une expression exacte des fonctions cherchées;

2° D'en fournir une valeur asymptotique, lorsqu'on les arrête à un nombre déterminé quelconque de termes.

1. Partons d'abord de la fonction $J_0(ix)$. Supposons, pour fixer les idées, x réel, moyennant quoi nous ne diminuerons pas la généralité en le supposant positif.

On a

$$J_0(ix) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi}\,d\varphi, \tag{2}$$

ou

$$J_0(ix) = \frac{e^x}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2x\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi. \tag{2'}$$

Posons

$$\sin\frac{\varphi}{2} = u;$$

nous aurons

$$J_0(ix) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 e^{-2u^2x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{3}$$

---

[1] *Voir* Hermite, *Cours autographié*, 11e leçon; Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 164; etc.

Remplaçons $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ par son développement :

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{u^2}{2} + \ldots + c_n u^{2n} + \ldots,$$

$$(5) \qquad c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

La série ainsi obtenue,

$$(6) \qquad \frac{2e^x}{\pi}\left(\int_0^1 e^{-2u^2x}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 e^{-2u^2x}\,du + \ldots + c_n\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2x}\,du + \ldots\right),$$

converge et représente $J_0(ix)$.

Nous allons même trouver une limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on s'arrête à un terme quelconque.

A cet effet, commençons par évaluer le reste de la série du binome qui figure dans la formule (4).

Soit

$$R_n = c_{n+1} u^{2(n+1)} + \ldots + c_{n+p} u^{2(n+p)} + \ldots.$$

On a évidemment

$$R_n < c_1 u^{2(n+1)} + \ldots + c_p u^{2(n+p)} + \ldots,$$

et, *a fortiori,*

$$(7) \qquad R_n < \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Si donc, dans l'égalité (3), nous remplaçons $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ par l'ensemble des $(n+1)$ premiers termes de (4), l'erreur commise sur $J_0(ix)$,

$$\frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 e^{-2u^2x} R_n\,du,$$

sera inférieure au produit de $\frac{2e^x}{\pi}$ par l'intégrale

$$(8) \qquad \int_0^1 e^{-2u^2x} u^{2n} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Si n est plus petit que $2x$, il convient, pour trouver une limite supérieure de la quantité (8), de prendre le maximum du produit

$e^{-2u^2x}u^{2n}$. Ce maximum a lieu pour $u^2 = \frac{n}{2x}$ et a la valeur $\left(\frac{n}{2x}\right)^n e^{-n}$. L'erreur commise sur $J_0(ix)$ est donc inférieure à

$$e^x\left(\frac{n}{2ex}\right)^n,$$

ou, si l'on veut, à

$$\frac{e^x}{\sqrt{2n\pi}}\,\frac{n!}{(2x)^n}, \tag{9}$$

ce qui met bien en évidence la façon dont l'ordre asymptotique de cette erreur décroît lorsque n augmente.

Pour $n > 2x$, nous remarquerons que l'intégrale (8) est inférieure à celle qu'on en déduit en supprimant le facteur e^{-2u^2x}, c'est-à-dire à

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}c_n,$$

ou, encore, à

$$\frac{K}{\sqrt{n}},$$

K étant un nombre fini.

Mais on peut préciser davantage en décomposant l'intégrale en deux parties, l'une prise de o à $\sqrt{\theta}$, l'autre de $\sqrt{\theta}$ à 1. On a

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-2u^2x}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\,du < \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} < \theta^n\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-\theta u^2}} < \frac{\pi}{2}\theta^n c_n,$$

$$\int_{\sqrt{\theta}}^1 e^{-2u^2x}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\,du < e^{-2\theta x}\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} < \frac{\pi}{2}c_n e^{-2\theta x}.$$

Donc la quantité (8) est inférieure à

$$\frac{K}{\sqrt{n}}(\theta^n + e^{-2\theta x}),$$

ou, en faisant

$$\theta = e^{-\frac{2x}{n}},$$

à

$$\frac{2K}{\sqrt{n}}e^{-2\theta x}.$$

L'erreur commise sur $J_0(ix)$ sera donc plus petite que

$$\frac{2K}{\sqrt{n}}e^{\eta x}, \tag{9'}$$

où $\eta = 1 - 2\theta$ est, d'après ce qui précède, toujours plus petit que 1 et tend vers -1 lorsque n augmente indéfiniment, x restant constant $\left(\text{ou, plus généralement, lorsque } \frac{n}{2x} \text{ augmente indéfiniment}\right)$.

Il reste à évaluer un terme quelconque

$$\frac{2e^x}{\pi} c_n \int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du \tag{10}$$

de la série (6).

On a

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du = \frac{1}{(2x)^n \sqrt{2x}} \int_0^{\sqrt{2x}} u^{2n} e^{-u^2}\, du$$

et

$$\int_0^{\sqrt{2x}} u^{2n} e^{-u^2}\, du = (-1)^n \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-\lambda u^2}\, du \right)_{\lambda=1}.$$

Si donc on pose

$$\mathcal{E}(z) = \int_z^\infty e^{-u^2}\, du,$$

d'où

$$\int_0^z e^{-u^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \mathcal{E}(z)$$

et

$$\mathcal{E}'(z) = -e^{-z^2}, \tag{11}$$

il viendra

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du = \frac{(-1)^n}{(2x)^n \sqrt{2x}} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}(\sqrt{2\lambda x}) \right] \right\}_{\lambda=1}.$$

En effectuant la dérivation du second membre ou encore par des intégrations par parties successives, nous trouvons

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{1}{(2x)^n} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}\sqrt{2x} \right) - \frac{2e^{-2x}\mathcal{X}_n}{\sqrt{\pi}\, c_n},$$

$\mathfrak{X}_n$ étant un polynome entier en $\frac{1}{x}$ tel que

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2\mathfrak{X}_n}{\sqrt{\pi}c_n} &= \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2x}\right)^n+\ldots \\ &+\frac{1.3.5\ldots(2n-2p-1)}{2^{n-p}}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-p+1}+\ldots+\frac{1}{2x}, \end{aligned}\right.$$

où C_n^p est un coefficient binomial.

La valeur du terme (10) est donc exprimée à l'aide de fonctions élémentaires et de la quantité $\mathcal{E}(\sqrt{2x})$.

Mais cette dernière est d'ordre très petit par rapport aux quantités que nous nous proposons de calculer. Si nous posons

$$(13)\qquad \mathcal{E}(z)=\int_z^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}e^{-z^2}}{2}\varepsilon(z^2),$$

$\varepsilon(z)$ a pour partie principale $\frac{1}{z\sqrt{\pi}}$ lorsque z est très grand.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

La fonction $J_0(ix)$ *est représentée, pour* $x>0$, *par la série*

$$(14)\quad J_0(ix)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{k_n}{(2x)^n}[1-\varepsilon(2x)e^{-2x}]-e^{-2x}\sqrt{2x}\mathfrak{X}_n\right\},$$

dans laquelle

$$(15)\qquad k_n=c_n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\ldots\frac{(2n-1)}{2}\right]^2,$$

pendant que $\mathfrak{X}_n$ *est le polynome en* $\frac{1}{x}$ *défini par la formule* (12); $\varepsilon(2x)$, *la quantité définie par la formule* (13) *(et qui a pour partie principale* $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$ *quand* x *est très grand)*.

Cette série converge pour toute valeur positive de x. *L'erreur commise en s'arrêtant au* $n^{\text{ième}}$ *terme est inférieure à la plus petite des expressions*

$$(9)\qquad \varkappa_n\frac{e^x}{(2x)^n}\qquad\left(\varkappa_n=\frac{n!}{\sqrt{2n\pi}}\right)$$

et

$$(9')\qquad \frac{Ke^{\eta x}}{\sqrt{n}},$$

où K *est une constante et* η *tend vers* -1 *quand* $\frac{n}{x}$ *augmente indéfiniment.*

On retombe sur les valeurs asymptotiques classiques en limitant la série (14) et en y supprimant les termes en $\mathfrak{X}_n$ et en $\varepsilon(2x)$.

2. Nous arriverons à des résultats analogues pour la fonction (1) moyennant une transformation préalable de l'intégrale

$$(16) \qquad J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\,d\varphi,$$

qui représente cette fonction.

En opérant tout d'abord sur elle comme sur l'intégrale (2), nous obtenons l'expression analogue à (3)

$$(17) \qquad J_0(x) = \frac{2e^{ix}}{\pi}\int_0^1 e^{-2iu^2x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Celle-ci, par le changement de u en $\sqrt{u}$, devient

$$(17)' \qquad J_0(x) = \frac{e^{ix}}{\pi}\int_0^1 e^{-2iux}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Supposons encore x positif. Intégrons le long d'un carré ABCD dont le côté AB sera le segment 0 —— 1 de l'axe réel, pendant que les côtés AC, BD sont situés en dessous de cet axe, l'un suivant la partie négative de l'axe imaginaire, l'autre suivant la partie correspondante de la parallèle à cet axe menée par le point $x = 1$. Nous aurons

$$\int_0^1 e^{-2iux}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_{AC} - \int_{BD} + \int_{CD}.$$

Les deux intégrales $\int_{AC}$, $\int_{BD}$ peuvent immédiatement s'obtenir à l'aide des expressions précédemment calculées. On doit, en effet, y remplacer u, soit par $-iv$, soit par $1 - iv$, v étant une variable réelle et positive, et écrire

$$\int_{AC} - \int_{BD} = -i\int_0^1 \frac{e^{-2vx}\,dv}{\sqrt{-iv}\sqrt{1+iv}} + ie^{-2ix}\int_0^1 \frac{e^{-2vx}\,dv}{\sqrt{iv}\sqrt{1-iv}}.$$

Dans cette formule, les radicaux $\sqrt{1-iv}$, $\sqrt{1+iv}$ doivent être pris avec leurs parties réelles positives, pendant que les radicaux $\sqrt{-iv}$, $\sqrt{iv}$ ont pour arguments respectifs $-\frac{i\pi}{4}$, $+\frac{i\pi}{4}$.

Si maintenant nous revenons à la variable $u=\sqrt{v}$, nous aurons

$$(18)\quad J_0(x)=-\frac{2i}{\pi}\left(e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{-2u^2x}\,du}{\sqrt{1+iu^2}}-e^{-i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{-2u^2x}\,du}{\sqrt{1-iu^2}}\right)+S,$$

$$(19)\qquad S=\frac{e^{ix}}{\pi}\int_{CD}\frac{e^{-2iux}\,du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Il est clair que les deux intégrales de la formule (18) ont des développements identiques à (6), la variable u^2 étant changée en $\pm iu^2$.

La convergence de ces développements est ici améliorée du fait des alternances de signe qu'ils présentent. Le reste R_n de la série (4) est alors [1] au plus de l'ordre de $c_n u^{2n}$, de sorte que les limites (9) et (9') précédemment assignées à l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série peuvent être respectivement remplacées par

$$(20)\qquad \frac{(n-1)!}{(2x)^n}$$

et

$$(20')\qquad \frac{Ke^{\eta' x}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

η' étant négatif et tendant vers -2 pour $\frac{n}{x}=\infty$.

Quant au terme complémentaire S, il est visiblement au plus de l'ordre de e^{-2x}, puisque dans l'intégrale de la formule (19) on a $u=-i+v$, v étant réel [2].

---

[1] Il en est ainsi, d'ailleurs, toutes les fois que l'argument de u^2 est différent de zéro, comme le montre l'expression, aisée à former, de R_n :

$$R_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)c_n}{\sqrt{1-u^2}}\,u^{2n+2}\,\tau_n(u^2),$$

$$\tau_n(u^2)=\int_0^1\frac{\xi^n\,d\xi}{\sqrt{1-\xi u^2}}.$$

[2] S est, en réalité, de l'ordre de $\frac{e^{-2x}}{x}$. On peut d'ailleurs le développer en une

La formule (18), mise sous forme réelle, conduit au développement suivant (toujours pour $x > 0$) :

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{k_{2n}}{(2x)^{2n}} \left[1 - \varepsilon(2x) e^{-2x}\right] - e^{-2x}\sqrt{2x}\, \mathfrak{X}_{2n} \right\} \\ - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sum (-1)^n \left\{ \frac{k_{2n+1}}{(2x)^{2n+1}} \left[1 - \varepsilon(2x) e^{-2x}\right] - e^{-2x}\sqrt{2x}\, \mathfrak{X}_{2n+1} \right\} \end{array} \right\} + S,$$

où k_n, $\mathfrak{X}_n$ et ε sont encore définis par les formules (15), (12), (13) *et où l'erreur commise sur la série lorsqu'on arrête celle-ci à son $n^{\text{ième}}$ terme est inférieure en valeur absolue à la plus petite des quantités*

$$\frac{(n-1)!}{(2x)^n} \tag{20}$$

et

$$\frac{K e^{\eta' x}}{n^{\frac{3}{2}}} \tag{20'}$$

$\left(\eta'\right.$ *tendant vers* -2 *pour* $\left.\frac{n}{x} = \infty\right)$.

L'erreur restante S *est d'ordre inférieur à* e^{-2x}.

Nous avons donc encore rendu convergente la série classique. Seulement elle ne représente plus la fonction. Mais la différence S est d'un ordre inférieur à celui d'un terme déterminé quelconque de la série.

Bien entendu, les formules (14) et (21) s'étendent aux valeurs imaginaires de x, sous des restrictions que nous n'examinerons d'ailleurs pas ici.

SUR LES SYSTÈMES COMPLÈTEMENT ORTHOGONAUX DE L'ESPACE EUCLIDIEN A n DIMENSIONS;

PAR M. JULES DRACH.

La première Partie de ce travail est consacrée à une étude *directe*

---

série analogue à (14), où figure, au lieu de la quantité $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}(\sqrt{2x})$, l'intégrale $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$.

de la généralité de la solution la plus étendue du système

$$(A) \qquad (i, k) = \mathrm{S}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k = 1, \ldots, n)$$

qui définit les systèmes complètement orthogonaux de l'espace à n dimensions.

Une première détermination de cette généralité résulte de ce qu'on peut déduire des équations (A) et de leurs conséquences *une seule expression de toutes les dérivées des y par rapport aux x, exprimées à l'aide des seules dérivées*

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^{p-1}},$$

où $i \leqq \lambda$. Ces dernières, qui sont alors les *dérivées paramétriques* de MM. Méray et Riquier, peuvent seules être prises arbitrairement en un point $x_{i0}\,(i = 1, \ldots, n)$. Elles se groupent d'ailleurs immédiatement en fonctions arbitraires : on peut prendre arbitrairement les fonctions des deux variables x_i, x_λ auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\,(i < \lambda)$ quand on fixe toutes les variables sauf x_i et x_λ, et aussi les fonctions d'une seule variable auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y fixe toutes les variables sauf x_λ.

Une seconde détermination de la généralité possible de la solution la plus étendue du système (A) résulte de ce qu'en différentiant une seule fois on obtient les deux systèmes

$$(\alpha) \qquad (i, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(\beta) \qquad (i, ki) + (i^2, k) = 0.$$

On fixe aisément la généralité de la solution la plus étendue du système (α) : cette solution dépend de $n(n-1)$ fonctions arbitraires de deux variables.

On conclut seulement de là les équations du premier ordre

$$(i, k) = F_{i,k}(x_i, x_k),$$

et l'on montre que, pour annuler ces fonctions $F_{i,k}$, il est nécessaire et suffisant d'ajouter $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition qui lient deux à deux les $n(n-1)$ fonctions arbitraires obtenues.

On retrouve ainsi les résultats de la première détermination [1].

La seconde Partie du présent travail a pour but l'étude systématique des divers groupes d'équations qui se présentent quand on recherche les conditions pour qu'une relation

$$u = f(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

définisse une famille de surfaces appartenant à un système complètement orthogonal.

On rencontre d'abord les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du *premier groupe* de M. Darboux.

Une étude préalable des conséquences des relations

$$\sum u_i v_i = 0, \qquad \sum v_i w_i = 0, \qquad \sum u_{ik} v_i w_k = 0,$$

qui définissent les rapports des w_i, v_i, etc., nous permet de classer les conditions d'intégrabilité des équations de ce premier groupe, qui sont en apparence en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$.

---

[1] Ces deux démonstrations faisaient partie, ainsi d'ailleurs que la seconde Partie du travail actuel, d'un *Mémoire sur les systèmes orthogonaux de l'espace à n dimensions* qui a obtenu en 1899 une mention très honorable dans le Concours du prix Bordin.

Ce Mémoire donnait également de la question précédente trois autres solutions, le résultat étant obtenu comme application des méthodes générales dues à MM. Méray, Riquier et Delassus : 1° au système (A) qui définit les y au moyen des x; 2° au système qui définit les éléments β_{ik}, introduits par M. Darboux, au moyen des x; la troisième solution, presque immédiate, était basée sur la considération du *système auxiliaire*.

Tous ces résultats paraîtront sous peu, à part.

J'ajouterai encore qu'une autre partie du Mémoire considéré comprenait l'étude de la solution la plus générale de l'équation

$$ds^2 = \sum^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k = H_1(\rho_1, \ldots, \rho_n)\, d\rho_1^2 + \ldots + H_n(\rho_1, \ldots, \rho_n)\, d\rho_n^2.$$

On y démontrait que, *dans le cas où elle est la plus étendue*, elle comporte $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux variables, et l'on déterminait tous les cas où une solution de cette étendue existe. Ces cas comprenant évidemment celui de l'espace *euclidien*, on a ainsi une sixième détermination de la généralité possible de la solution de (A).

Ce dernier travail paraîtra également sous peu dans un autre recueil [*cf.* à ce sujet une Note (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1898)].

Elles se partagent en deux catégories d'égal nombre; les unes sont des *identités, les autres sont les équations du second groupe* de M. Darboux [1], qui expriment que *les lignes de courbure de chaque surface individuelle* $u =$ const. *sont coordonnées :*

$$\sum u_{ikl} v_i w_k t_l = 0.$$

Ces dernières équations sont donc *en général* des conséquences des premières. On fixe aisément les cas d'exception : ils résultent de ce que les conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe sont des produits de deux facteurs, dont l'un dépend des racines de l'équation en λ qui définit les lignes de courbure de la surface $u =$ const.; ce n'est que si ce facteur est différent de zéro que le second $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ s'annule nécessairement.

M. Darboux avait été amené à ajouter le *second groupe* par la considération *des surfaces parallèles* pour lesquelles le premier groupe disparaît. On montre aisément que dans ce cas tous les facteurs autres que les $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ sont nuls; les équations du second groupe ne peuvent plus se déduire du premier. Le paradoxe apparent est ainsi expliqué.

I. — Généralité possible des systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien a n dimensions.

1. *Première démonstration.* — Soit à étudier le système

$$\text{(A)} \qquad S_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0,$$

où i et k sont deux nombres différents de la suite $1, 2, \ldots, n$.

Nous montrerons d'abord qu'*on peut résoudre ces équations* (A) *par rapport aux dérivées* $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$, *où* λ *est inférieur à* i.

---

[1] *Cf.* Darboux, *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. III, 1866); Mémoire *sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, 1878); *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Livre I, Chap. VI, p. 119.

Les équations (A) possèdent la solution évidente

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous ferons remarquer tout de suite que *toute fonction des y et de leurs dérivées qui ne s'annule pas pour cette solution ne peut s'annuler en vertu des équations* (A) *et de leurs conséquences.* Cette remarque nous sera très utile.

Écrivons maintenant les équations (A) dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \ldots && = 0,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_1}\frac{\partial y_3}{\partial x_3} + \ldots && = 0,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_3} + \ldots && = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire en prenant successivement pour (i, k) les groupes $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$; ... qui conduisent respectivement à $1, 2, 3, \ldots$ équations.

La première équation est résoluble par rapport à $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$, car le coefficient de cette dérivée devient égal à l'unité pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les deux suivantes ne renferment, avec la dérivée déjà calculée $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$, que deux dérivées à calculer $\frac{\partial y_1}{\partial x_3}$ et $\frac{\partial y_2}{\partial x_3}$; le déterminant fonctionnel relatif à ces éléments se réduit pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

à sa diagonale principale et, par suite, à l'unité. Ces deux équations permettent donc de calculer les dérivées considérées.

Ce raisonnement se poursuit manifestement sans modification et la proposition annoncée est établie.

2. Considérons maintenant le système obtenu en différentiant une seule fois les équations (A); nous établirons qu'*il est résoluble par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ *et aux déri-*

vées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$, *où* λ *est inférieur à* i, puisqu'il donne une seule expression pour chacune de ces dérivées.

Différentions d'abord l'équation

$$(i, k) = \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0$$

par rapport à une lettre x_h différente de x_i et de x_k; nous aurons

$$\mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} + \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} = 0.$$

Les équations de cette forme sont en nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$; considérons toutes celles où les dérivations sont relatives aux trois lettres x_i, x_h, x_k; elles peuvent s'écrire symboliquement

$$(ih, k) + (i, hk) = 0,$$
$$(hk, i) + (h, ki) = 0,$$
$$(hi, k) + (k, ih) = 0,$$

et donnent, par conséquent,

$$(ih, k) = 0,$$

c'est-à-dire, pour trois lettres différentes x_i, x_h, x_k,

$$(\alpha) \qquad \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0.$$

On a, d'autre part, en différentiant les équations (A) par rapport à l'une des lettres x_i, x_h qui y figurent, les équations

$$(\beta) \qquad \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} + \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} = 0.$$

Considérons, parmi les équations (α), celles où les indices i et h ont la même valeur; elles sont en nombre $(n-2)$ et déterminent d'une seule manière toutes les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h}$ $(\lambda \neq i, h)$ au moyen des deux dérivées $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \partial x_h}$, $\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_h}$ et des dérivées premières. Montrons-le par exemple sur le cas $i = 1$, $h = 2$; le déterminant des coefficients des dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2}$ est manifestement le déterminant

fonctionnel $\frac{\partial(y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_2, \ldots, x_n)}$; il se réduit donc à l'unité quand on y fait $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et ne peut s'annuler en vertu des équations (A).

Les équations (α) *déterminent par suite d'une seule manière toutes les dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h}$ $(\lambda \neq i \neq h)$.

Supposons qu'on porte les expressions des dérivées que nous venons de calculer dans les équations (β); les seules dérivées du second ordre qui pourront encore figurer dans ces dernières ont la forme $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$; nous allons montrer que *les* $n(n-1)$ *équations obtenues sont résolubles par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$, *où* λ *est inférieur à* i, *dérivées qui sont aussi en nombre* $n(n-1)$.

Posons d'abord, suivant la notation adoptée,

$$(ih, i) = \mathbf{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i};$$

les équations (α), où figurent les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h}$, permettront de calculer les (ih, i). On trouvera, sans difficulté,

$$(ih, i)\,\Delta_{i,h} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \partial x_h}\,\Theta^i_{i,h} + \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_h}\,\Theta^i_{h,i},$$

en posant

$$\Delta_{i,h} = \Delta_{h,i} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\Theta^i_{i,h} = \frac{\partial(y_i, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\Theta^i_{h,i} = \frac{\partial(y_h, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

ou encore plus simplement

$$(ih, i) = \mu^i_{i,h} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \partial x_h} + \mu^i_{h,i} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_h}$$

avec

$$\mu^i_{i,h} = \frac{\Theta^i_{i,h}}{\Delta_{i,h}}.$$

Passons maintenant à l'examen des équations (β),

$$(\beta) \qquad (i^2, h) + (ih, i) = 0,$$

et groupons-les comme nous l'avons fait pour les équations (A), c'est-à-dire en prenant successivement pour (i, h) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; ....

Le premier groupe renferme les deux équations

$$(1^2, 2) + (12, 1) = 0,$$
$$(2^2, 1) + (21, 2) = 0,$$

qui s'écrivent aussi

$$(1^2, 2) + \mu^1_{1,2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu^1_{2,1} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$
$$(2^2, 1) + \mu^2_{1,2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu^2_{2,1} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0;$$

sous cette forme on reconnaît qu'elles ne contiennent que deux des dérivées à calculer $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}$. La première équation donne $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}$, puisque le coefficient de cette dérivée se réduit à l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$, et la seconde donne ensuite $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}$.

Un raisonnement analogue peut se faire sur le second groupe, formé de quatre équations :

$$(1^2, 3) + (13, 1) = 0,$$
$$(2^2, 3) + (23, 2) = 0,$$
$$(3^2, 1) + (31, 3) = 0,$$
$$(3^2, 2) + (32, 3) = 0,$$

qui renferment les quatre dérivées nouvelles à calculer :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2};$$

les deux premières ne renferment que deux dérivées nouvelles, et pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$ le déterminant de leurs coefficients se réduit à sa diagonale principale formée d'éléments égaux à l'unité; les deux dernières équations donneront ensuite $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2}$ et $\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2}$, et la même remarque s'applique au déterminant de leurs coefficients.

Tout cela peut d'ailleurs se répéter *mutatis mutandis* pour les groupes suivants, chaque groupe

$$(1, h), \quad (2, h), \quad \ldots, \quad [(h-1), h]$$

donnant lieu aux deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll} (1^2, h) + (1h, 1) = 0, & (h^2, 1) + (h1, h) = 0, \\ (2^2, h) + (2h, 2) = 0, & (h^2, 2) + (h2, h) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [(h-1)^2, h] + [(h-1)h, (h-1)] = 0, & [h^2, (h-1)] + [h(h-1), h] = 0, \end{array}$$

auxquels s'appliquent les mêmes remarques.

La proposition annoncée est donc établie.

3. Nous venons de voir que les équations du second ordre (α) et (β) déduites du système (A) sont résolubles par rapport à toutes les dérivées du second ordre, sauf les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$, pour lesquelles i est inférieur ou égal à λ; nous allons montrer qu'en passant au troisième ordre on pourra calculer toutes les dérivées troisièmes des y sauf les dérivées

$$\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^3}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2 \partial x_\lambda}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda^2},$$

pour lesquelles i est inférieur ou égal à λ. *Ce résultat établi pourra s'étendre alors à tous les ordres de dérivation.*

Différentions, par conséquent, les équations du second ordre

$$(\alpha) \qquad (ih, k) = 0,$$

$$(\beta) \qquad (ii, k) + (ik, i) = 0$$

une fois encore.

Les équations (α) donnent d'abord

$$(a) \qquad (ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (i \neq h \neq k \neq l),$$

$$(b) \qquad (ih^2, k) + (ih, kh) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

$$(c) \qquad (ihk, k) + (ih, k^2) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

et nous en déduirons immédiatement toutes les dérivées des y relatives à trois lettres différentes. En joignant, en effet, $(n-3)$

des équations (a) à trois équations du groupe (c), on a le Tableau

$$\begin{aligned}
&(ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n \text{ sauf } i, h, l),\\
&(ihl, i) + (hl, i^2) = 0,\\
&(ihl, h) + (il, h^2) = 0,\\
&(ihl, l) + (ih, l^2) = 0,
\end{aligned}$$

et le déterminant des dérivées $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l}$ se réduit à l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$, tous les éléments de sa diagonale principale devenant égaux à l'unité et tous les autres s'annulant.

Différentions maintenant, de toutes les manières possibles, les équations (β); elles donneront

$$\begin{aligned}
&(a') \quad (i^2 h, k) + (i^2, kh) + (ikh, i) + (ik, ih) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),\\
&(b') \quad (i^2 k, k) + (i^2, k^2) + (ik^2, i) + (ik, ik) = 0 \qquad (i \neq k),\\
&(c') \qquad\qquad (i^3, k) + 2(i^2, ki) + (i^2 k, i) = 0 \qquad (i \neq k).
\end{aligned}$$

Les équations (a') sont satisfaites en vertu des équations (b) et (c); il ne reste donc à examiner que les équations (b') et (c') avec celles du groupe (b) déjà formé.

Considérons les équations du groupe (b),

$$(b) \qquad (ik^2, h) + (ik, kh) = 0,$$

où i et k ont la même valeur; elles sont en nombre $(n - 2)$ et déterminent les dérivées $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k^2} (\lambda \neq i \neq k)$ au moyen des deux dérivées troisièmes

$$\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_i \partial x_k^2}, \quad \frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i \partial x_k^2}$$

et de dérivées d'ordre inférieur. [Le déterminant des inconnues se réduit toujours à l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$.]

Passons aux groupes (b') et (c'). Nous remarquerons que les équations (b') sont symétriques par rapport aux indices i et k, tandis qu'il n'en est pas de même des équations (c'), et nous formerons un premier groupe des équations

$$(b'') \qquad \left\{ \begin{aligned} &(i^2 k, k) + (ik^2, i) + (i^2, k^2) + (ik, ik) = 0,\\ &(k^3, i) + 2(k^2, ik) + (k^2 i, k) = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on supposera k *inférieur à* i.

Les équations de ce groupe (b'') *seront résolubles par rapport à toutes les dérivées* $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2\,\partial x_\lambda}$, $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^2}$, *où* λ *est inférieur à* i.

Prenons successivement pour (k, i) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$; ....

La première combinaison donne deux équations qui renferment les deux éléments *nouveaux* [1] $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2\,\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1\,\partial x_2^2}$; la deuxième équation ne renferme que $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2\,\partial x_1^2}$ avec le coefficient $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ et la première permet ensuite de calculer $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1\,\partial x_2^2}$, le coefficient de cette inconnue étant toujours $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$.

Cette remarque s'applique à toutes les combinaisons : la combinaison (i, k) ne renferme que deux éléments à calculer $\frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i^2\,\partial x_k}$, $\frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i\,\partial x_k^2}$ et le déterminant des coefficients se réduit à l'unité pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Le groupe (b'') épuise les équations (b') et la moitié seulement des équations (c'); il reste donc à envisager un groupe (c'') formé des équations

$$(k^3, i) + 2(k^2, ki) + (k^2 i, k) = 0,$$

pour lesquelles k *est supérieur à* i. Nous allons montrer qu'*on peut les résoudre par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^3}$, *où* λ *est inférieur à* i.

Le raisonnement est analogue à celui que nous avons fait pour les dérivées premières. On prend successivement pour (i, k) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$. La première combinaison $(1, 2)$ ne renferme que $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2^3}$, dont le coefficient est $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$. Les deux combinaisons $(1, 3)$ et $(2, 3)$ renferment les inconnues $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_3^3}$, $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x_3^3}$, et le déterminant des coefficients de ces inconnues se réduit à

---

[1] On a vu plus haut que toutes les dérivées $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2\,\partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ s'expriment avec les dérivées du second et du premier ordre.

l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$. D'une manière générale, les combinaisons

$$(1, i), \quad (2, i), \quad \ldots, \quad [(i-1), i]$$

renferment les éléments nouveaux

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_i^3}, \quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_i^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^3 y_{i-1}}{\partial x_i^3}$$

et le déterminant de leurs coefficients est simplement le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1})}.$$

Cela suffit à établir la proposition annoncée.

4. *Si l'on différentie jusqu'à l'ordre* $(p+2)$ *les équations* (A), *on pourra calculer, en fonction des dérivées*

$$\frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i^{p+2}}, \quad \frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i^{p+1}\, \partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_\lambda^{p+1}},$$

où i est inférieur ou égal à λ, toutes les autres dérivées d'ordre $p+2$; on obtiendra une seule expression pour chacune de ces dérivées.

Supposons le théorème établi pour les ordres p et $p+1$ (nous venons de l'établir pour les ordres 2 et 3); montrons qu'il est encore vrai pour l'ordre $p+2$.

Nous désignerons d'une manière générale par A_p l'ensemble de toutes les dérivées d'ordre p, à l'exclusion des dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\, \partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_\lambda^{p-1}},$$

où i est au plus égal à λ. Si l'une des dérivées de A_{p+2} s'obtient de deux manières différentes en différentiant les dérivées de A_{p+1}, ces dernières ne peuvent différer que par une des variables de différentiation; les deux dérivées de A_p qui les ont fournies ne différeront donc que par deux variables de différentiation au plus. Nous mettrons dans toute dérivée A_{p+2} quatre lettres en évidence, qui seront les indices de quatre variables, choisies d'une manière convenable, sur lesquelles il nous suffira de raisonner.

Ces dérivées de A_{p+2} peuvent renfermer, pour une fonction y_λ, quatre, trois, deux ou une au moins des variables x_i *différentes* de x_λ; il y a lieu d'étudier successivement les différents cas qui se présentent.

1° Considérons une dérivée de A_{p+2} où figurent quatre lettres différentes et supposons qu'on l'ait obtenue de deux manières en différentiant respectivement, par rapport à x_i et x_h (¹), deux dérivées de A_{p+1}; les deux expressions de cette dérivée pourront s'écrire, suivant leur origine, sous la forme

$$i(hklJ), \quad h(iklJ),$$

où l'on a mis en évidence les indices k, l des deux autres lettres et la partie J commune qu'il est inutile de développer.

La dérivée $(hklJ)$ appartient à A_{p+1} et n'a qu'une seule expression; on peut donc prendre pour cette expression $h(klJ)$, puisque (klJ) appartient à A_p.

De même $(iklJ)$ appartient à A_{p+1} et n'a qu'une seule expression; on prendra pour cette expression $i(klJ)$, puisque (klJ) appartient à A_p.

Les deux expressions de $(ihklJ)$ sont alors

$$ih(klJ) \quad \text{et} \quad hi(klJ);$$

on les obtient en dérivant deux fois *une même dérivée* de A_p; elles sont donc identiques.

2° Considérons maintenant une dérivée de A_{p+2} où figurent seulement trois lettres différentes; elle aura l'un des types

$$(ihk^2J), \quad (ihk\lambda J).$$

Supposons qu'une dérivée du premier type s'obtienne de deux manières différentes :

$$i(hk^2J), \quad h(ik^2J);$$

elle s'obtiendra aussi sous la forme

$$k(ihkJ),$$

(¹) Nous supposons expressément que les lettres i et h sont différentes de λ; le cas où l'une d'elles est λ sera traité plus loin.

puisque $(ihkJ)$ appartient à A_{p+1}. Comparons les dérivées (hk^2J) et $(ihkJ)$ qui appartiennent à A_{p+1} ; elles n'ont qu'une seule expression pour laquelle on pourra prendre respectivement

$$k(hkJ) \quad \text{et} \quad i(hkJ),$$

puisque (hkJ) appartient à A_p. Les deux expressions de $i(hk^2J)$ et $k(ihkJ)$ sont donc identiques. Il en est de même des expressions $h(ik^2J)$ et $k(ihkJ)$ et enfin des expressions $i(hk^2J)$ et $h(ik^2J)$.

Passons aux dérivées du second type et considérons deux expressions

$$i(hk\lambda J) \quad \text{et} \quad h(ik\lambda J)$$

de l'une d'elles. La dérivée $(hk\lambda J)$ appartient à A_{p+1} ; elle n'a donc qu'une seule expression qu'on peut écrire $\lambda(hkJ)$ puisque (hkJ) appartient à A_p, et l'on a, par suite,

$$i(hk\lambda J) \equiv i\lambda(hkJ).$$

On aura de même

$$h(ik\lambda J) \equiv h\lambda(ikJ).$$

Mais aux deux expressions signalées de la dérivée de A_{p+2} il faut ajouter l'expression

$$\lambda(ihkJ)$$

puisque $(ihkJ)$ est une dérivée de A_{p+1}, expression qu'on peut écrire indifféremment

$$\lambda i(hkJ) \quad \text{ou} \quad \lambda h(ikJ).$$

Il suffit de comparer ces deux dernières formes aux formes

$$i\lambda(hkJ) \quad \text{et} \quad h\lambda(ikJ)$$

pour reconnaître que toutes les expressions obtenues pour $(ihk\lambda J)$ sont identiques.

3° Examinons les dérivées A_{p+2}, où ne figurent que deux lettres différentes de x_λ; elles ont l'un des types

$$(i^2hJ), \quad (i^2h^2J), \quad (i^2h\lambda J), \quad (ih\lambda^2J),$$

Si une dérivée du premier type a deux expressions

$$i(i^2hJ), \quad h(i^3J),$$

on conclut de la seconde que i est supérieur à λ et, par suite, que $(i^2 J)$ appartient à A_p : les deux expressions considérées peuvent donc s'écrire

$$ih(i^2 J), \quad hi(i^2 J).$$

Si une dérivée du second type a deux expressions

$$i(ih^2 J), \quad h(i^2 hJ),$$

la dérivée $(ih^2 J)$ appartient à A_{p+1} et peut s'écrire $h(ihJ)$, puisque (ihJ) appartient à A_p; de même $(i^2 hJ)$ s'écrira $i(ihJ)$ et les deux expressions considérées seront encore

$$ih(ihJ) \quad \text{et} \quad hi(ihJ).$$

Si une dérivée du troisième type a deux expressions

$$i(ih\lambda J) \quad \text{et} \quad h(i^2 \lambda J),$$

elle en aura une troisième

$$\lambda(i^2 hJ),$$

puisque $(i^2 hJ)$ appartient à A_{p+1}. La première et la troisième s'écriront manifestement

$$i\lambda(ihJ) \quad \text{et} \quad \lambda i(ihJ),$$

puisque (ihJ) appartient à A_p; elles sont donc identiques. Comparons la première à la seconde; puisque $(i^2 \lambda J)$ appartient à A_{p+1}, c'est qu'on a $i > \lambda$; donc la dérivée $(i\lambda J)$ appartient à A_p et les deux expressions considérées s'écrivent

$$ih(i\lambda J) \quad \text{et} \quad hi(i\lambda J).$$

Les trois expressions de $(i^2 h\lambda J)$ sont donc identiques.

Passons au quatrième type : avec les expressions $i(h\lambda^2 J)$ et $h(i\lambda^2 J)$, on a aussi dans A_{p+2} l'expression

$$\lambda(ih\lambda J),$$

puisque $(ih\lambda J)$ appartient à A_p. L'expression $(h\lambda^2 J)$ appartenant à A_{p+1}, on a $h > \lambda$ et, par conséquent, $(h\lambda J)$ appartient à A_p; les expressions $i(h\lambda^2 J)$ et $\lambda(ih\lambda J)$ peuvent donc s'écrire

$$i\lambda(h\lambda J) \quad \text{et} \quad \lambda i(h\lambda J),$$

c'est-à-dire sont identiques. Les lettres i et h jouant le même rôle, la deuxième et la troisième expression de la dérivée considérée sont aussi identiques.

4° Il nous reste à examiner les dérivées A_{p+2} qui ne renferment qu'une seule variable x_i différente de x_λ; elles ont les types

$$(i^4 J), \quad (i^3 \lambda J), \quad (i^2 \lambda^2 J), \quad (i \lambda^3 J),$$

où i est supérieur à λ.

Or, il est clair qu'elles ne peuvent s'obtenir qu'en dérivant par rapport à x_i une dérivée A_{p+1}, puisque nous avons écarté le cas où l'une des variables de différentiation serait x_λ.

Pour achever la démonstration, il faut maintenant considérer une dérivée A_{p+2} ayant deux expressions

$$i(\lambda J) \quad \text{et} \quad \lambda(iJ).$$

Mais il suffit de jeter un coup d'œil sur les divers types de dérivées A_{p+1} pour reconnaître que, *si* (λJ) *est un* A_{p+1}, *la dérivée* (J) *est toujours un* A_p. Les deux expressions considérées sont donc

$$i\lambda(J) \quad \text{et} \quad \lambda i(J),$$

et, par suite, elles sont identiques.

5. Nous avons donc établi que les seules dérivées paramétriques pour tous les ordres de dérivation sont les dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^{p-1}},$$

pour lesquelles $i \leqq \lambda$. Ce sont manifestement toutes les dérivées par rapport à x_i et à x_λ de la dérivée $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ $(i \leqq \lambda)$.

On les obtient toutes et chacune d'elles une fois seulement en se donnant arbitrairement :

1° *Les fonctions des deux variables* x_i, x_λ *auxquelles se réduisent les dérivées* $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ $(i < \lambda)$ *quand on y fixe les valeurs initiales des autres variables;*

2° *Les fonctions d'une seule variable* x_λ *auxquelles se ré-*

duisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ *quand on y fixe les valeurs initiales de toutes les variables sauf* x_λ.

C'est ce que nous entendons en disant que la solution générale du système comprend $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux variables et n fonctions arbitraires d'une seule variable.

6. *Seconde démonstration.* — Nous avons vu tout à l'heure qu'on déduit du système

$$(A) \qquad (i, k) = \mathop{\mathrm{S}}_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0,$$

par une première différentiation, les systèmes du second ordre

$$(\alpha) \qquad (i, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(\beta) \qquad \begin{cases} (i, ki) + (i^2, k) = 0, \\ (i, k^2) + (ik, k) = 0. \end{cases}$$

Les équations (α) déterminent toutes les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k} (\lambda \neq i \neq k)$ à l'aide des dérivées du second ordre restantes et des dérivées du premier ordre. Considérons *isolément* ces équations (α); nous allons montrer qu'elles forment un système complètement intégrable qui permet de calculer toutes les dérivées des expressions $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ et celles-là seulement.

On a vu qu'une différentiation des équations (α) donne les trois groupes d'équations

$$(a) \qquad (ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (i \neq h \neq k \neq l),$$

$$(b) \qquad (ih^2, k) + (ih, kh) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

$$(c) \qquad (ihk, k) + (ih, k^2) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

dont on peut déduire toutes les dérivées

$$\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h^2} \qquad (\lambda \neq i \neq h \neq l).$$

La proposition est donc établie pour le troisième ordre.

Supposons-la vraie pour les ordres p et $(p+1)$ et montrons qu'elle subsiste pour l'ordre $(p+2)$, c'est-à-dire établissons que

les diverses expressions d'une même dérivée d'ordre $(p+2)$ qui appartient à l'ensemble considéré sont nécessairement identiques.

Les dérivées dont il s'agit forment un ensemble B, caractérisé par ce fait que *deux variables au moins x_i, x_h différentes de x_λ figurent dans les variables de différentiation de toute fonction y_λ.*

Soient $\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\frac{\partial I}{\partial x_h}$ deux expressions d'une même dérivée de B_{p+2}, où l'on suppose $(i \neq h \neq \lambda)$; je dis que H doit contenir une variable de différentiation x_l différente de x_i et x_h ou la variable x_λ prise deux fois au moins. En effet, si H, qui appartient à B_{p+1}, ne renferme que x_h et x_i, la dérivée I qui appartient à B_{p+1} aussi ne renfermera plus que x_i, ce qui est contradictoire.

On peut donc écrire, puisque les dérivées de B_{p+1} n'ont qu'une seule expression,

$$H = \frac{\partial^2 J}{\partial x_h \, \partial x_l}, \qquad I = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \, \partial x_l},$$

l pouvant être ou non égal à h.

Supposons d'abord $(l \neq i \neq h)$; si J est une dérivée prise par rapport à une variable autre que x_l, $\frac{\partial J}{\partial x_l}$ appartient à B_p et les deux expressions

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x_h}$$

peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_h}\left(\frac{\partial J}{\partial x_l}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_h \, \partial x_i}\left(\frac{\partial J}{\partial x_l}\right).$$

Si J ne renferme que la variable de différentiation x_l, cette variable y figure au moins une fois, puisque 2 est la valeur minimum de p : en écrivant

$$J = \frac{\partial L}{\partial x_l},$$

on aura

$$H = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h \, \partial x_l}\right), \qquad I = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_l}\right)$$

et les expressions considérées de la dérivée B_{p+2} sont

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h \, \partial x_l}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_h \, \partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_l}\right)$$

qu'on peut manifestement écrire aussi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h\,\partial x_l}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_h}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial x_l}\right),$$

formes sous lesquelles elles sont les dérivées par rapport à x_l d'une même dérivée B_{p+1}.

Supposons maintenant $l = h$, c'est-à-dire

$$H = \frac{\partial^2 J}{\partial x_h^2}, \qquad I = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i\,\partial x_h};$$

puisque H appartient à B_{p+1}, c'est que J est une dérivée prise une fois au moins par rapport à une variable distincte de x_h et x_λ, et il en résulte que $\frac{\partial J}{\partial x_h}$ appartient à B_p. On a donc, comme plus haut,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_h}\left(\frac{\partial J}{\partial x_h}\right), \qquad \frac{\partial I}{\partial x_h} = \frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_i}\left(\frac{\partial J}{\partial x_h}\right).$$

La proposition annoncée est établie dans tous les cas.

7. Nous pouvons conclure, des remarques que nous venons de faire, que toutes les dérivées d'un ordre quelconque p des y s'expriment d'une seule manière à l'aide des dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda^{p-1}\,\partial x_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda\,\partial x_i^{p-1}}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p} \qquad (\lambda \neq i),$$

qui sont, par conséquent, les *dérivées paramétriques*.

On peut donc satisfaire aux équations du second ordre (α) en prenant arbitrairement :

1° Toutes les fonctions des deux variables x_i, x_λ auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ lorsqu'on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_λ, des valeurs arbitraires $x_{h0}\,(h \neq i, \lambda)$;

2° Toutes les fonctions d'une seule variable auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y donne à toutes les variables, sauf x_λ, les valeurs arbitraires $x_{h0}\,(h \neq \lambda)$.

Il est clair, en effet, qu'on obtient ainsi une valeur et une seule pour chacune des dérivées paramétriques et, par suite, une valeur et une seule pour toutes les dérivées des fonctions inconnues y_λ.

La solution obtenue est *la plus étendue,* puisque les dérivées paramétriques n'y sont liées, en un point $x_{h0}(h=1,\ldots,n)$ de situation générale, par aucune relation.

La solution générale du système (α) *dépend donc de* $n(n-1)$ *fonctions arbitraires de deux variables et de* n *fonctions arbitraires d'une variable.*

Nous ferons maintenant observer que les équations (α) n'entraînent pas les équations (A), mais seulement les relations

$$(A') \qquad (i,k) = F_{ik}(x_i, x_k),$$

où les F_{ik} sont des fonctions arbitraires des deux variables dont elles dépendent. Il résulte de là que, si l'on remplace dans les équations (A) les y_λ par les solutions les plus générales du système (α), ces premiers membres deviennent simplement des fonctions des deux variables x_i, x_k correspondantes. Les expressions $\mathop{\mathrm{S}}\limits_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k}$, où l'on remplace les y_λ par les solutions les plus générales du système (α), ne dépendent donc qu'en apparence des variables autres que x_i et x_k, et elles ne changeront pas si l'on fixe dans chacune d'elles toutes les variables sauf, x_i et x_k.

Après cette opération, $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ se réduit dans l'expression (i,k) à une simple fonction de x_i et x_k, dépendant des données initiales indiquées plus haut; les équations (A) n'entraînent donc que $\frac{n(n-1)}{2}$ relations entre ces données initiales, relations qu'on obtient en égalant à zéro les fonctions F_{ik}. Examinons d'un peu plus près ces relations.

Désignons, pour fixer les idées, par $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$ la fonction des deux variables x_i, x_λ à laquelle se réduit $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_λ, les valeurs arbitraires $x_{k0}(k \neq i, \lambda)$; cette fonction arbitraire est une des données initiales de la solution générale de (α). Désignons de même par $\psi_\lambda(x_\lambda)$ la fonction de x_λ à laquelle se réduit $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_λ, les mêmes valeurs initiales; cette fonction arbitraire est encore une des données initiales de la solution générale de (α).

L'équation $(i, k) = 0$, quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_k, les mêmes valeurs initiales, prendra la forme

$$\varphi_{1i}(x_i, x_{10})\,\varphi_{1k}(x_k, x_{10}) + \ldots + \psi_i(x_i)\,\varphi_{ik}(x_k, x_i) + \ldots$$
$$+ \varphi_{ki}(x_i, x_k)\,\psi_k(x_k) + \ldots + \varphi_{ni}(x_i, x_{n0})\,\varphi_{nk}(x_k, x_{n0}) = 0;$$

elle ne renferme que deux fonctions de *deux variables* qui sont les données initiales arbitraires $\varphi_{ik}(x_k, x_i)$, $\varphi_{ki}(x_i, x_k)$. Il en résulte que ces équations *fonctionnelles* en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ détermineront $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions de deux variables à l'aide des autres; par exemple toutes les fonctions $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$, où i est inférieur à λ, à l'aide des fonctions $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$, où i est supérieur à λ.

On le reconnaît aisément en prenant pour les $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$ la forme particulière

$$(x_\lambda - x_{\lambda 0})\,\Phi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda),$$

où $\Phi_{\lambda i}$ est une fonction *holomorphe arbitraire;* ce choix des données initiales réduit les équations fonctionnelles $(i, k) = 0$ à la forme simple

$$\psi_i(x_i)(x_i - x_{i0})\,\Phi_{ik}(x_k, x_i) + \psi_k(x_k)(x_k - x_{k0})\,\Phi_{ki}(x_i, x_k) = 0,$$

qui détermine $\Phi_{ik}(x_k, x_i)$ lorsque k est inférieur à i.

Nous avons donc établi que *les données initiales ne peuvent plus dépendre que de* $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de deux variables et de n fonctions arbitraires d'une variable.* C'est bien le résultat déjà obtenu par une autre voie.

II. — Étude des équations qui expriment que les surfaces $u =$ const. font partie d'un système complètement orthogonal.

8. Si les fonctions u, v, w, ... des n variables indépendantes définissent n familles de surfaces deux à deux orthogonales de l'espèce à n dimensions, elles doivent satisfaire aux $\frac{n(n-1)}{2}$ rela-

tions

$$(a) \qquad \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \qquad (u \neq v = w, \ldots).$$

M. Darboux [1] en conclut, par un procédé régulier, une suite d'équations du premier ordre par rapport aux fonctions v, w, ..., dont les deux premiers types sont

$$(b) \qquad \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0$$

et

$$(c) \qquad \sum_{i,k}\left(\sum_l u_l u_{ikl} - 2\sum_h u_{ih} u_{kh}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0.$$

C'est en observant que les équations (a) et (b) déterminent les rapports des dérivées des fonctions v, w, ... qu'on obtient, en portant ces rapports dans les équations (c), les équations qui constituent le *premier groupe* d'équations du troisième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$.

Nous nous proposons d'étudier les conséquences de ces équations du premier groupe *prises isolément*. Nous les regardons alors comme obtenues en éliminant les quantités $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ... dans les relations

$$\sum u_i v_i = 0, \qquad \sum u_{ik} v_i w_k = 0, \qquad \sum A_{ik} v_i w_k = 0,$$

où l'on a posé $A_{ik} = \sum_l u_l u_{ikl} - 2\sum_k u_{ih} u_{kh}$ sans rien supposer sur ces quantités $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ....

9. Désignons donc par $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ... les $(n-1)$ systèmes de solutions des équations

$$(1) \qquad \sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(2) \qquad u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = 0,$$

---

[1] *Cf.* par exemple *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Liv. I, Chap. I, p. 15.

qui correspondent aux racines λ_v, λ_w, ... de l'équation

$$(3) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & \dots & u_{1n} & u_1 \\ u_{21} & u_{22}-\lambda & \dots & u_{2n} & u_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}-\lambda & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

racines que nous supposerons distinctes. Ces éléments v_i, w_h, ... vérifieront les équations

$$\sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0;$$

un calcul facile permet de l'établir en partant des équations (1) et (2) : on déduit en effet des équations (1)

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_k w_i = \lambda_v \sum_i v_i w_i + \mu_v \sum_i u_i w_i,$$

et, par conséquent, en tenant compte des équations (2),

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_k w_i = \lambda_v \sum_i v_i w_i;$$

on aurait de même

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = \lambda_w \sum_i v_i w_i.$$

On peut donc en conclure, si $\lambda_v - \lambda_w \neq 0$, les relations

$$\sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0.$$

Nous supposerons que les fonctions $v_1, \dots, v_n$; $w_1, \dots, w_n$; ..., dont les rapports mutuels sont déterminés par les équations (1) et (2), satisfont aux équations

$$(4) \qquad \sum_{i,k} v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{ui} u_k) = 0,$$

qui sont au nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, c'est-à-dire que *la fonction u satisfait aux équations du troisième ordre qui constituent le premier groupe d'équations de M. Darboux.*

Nous nous proposons de rechercher quelles conséquences on en peut déduire à l'égard des surfaces

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

10. Différentions l'équation (4) par rapport à x_m, nous aurons

$$\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)$$
$$+ \sum_{i,k} v_i w_k [(u_1 u_{ikm1} + \ldots) + (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) - 2(u_{k1} u_{im1} + \ldots)$$
$$- 2(u_{i1} u_{km1} + \ldots)] = 0;$$

multiplions alors par t_m les deux membres de cette équation et faisons la somme des équations analogues relatives aux diverses valeurs de l'indice $m (m = 1, \ldots, n)$, nous obtiendrons la nouvelle relation

$$\sum_{i,k,m} v_i w_k t_m \{(u_1 u_{ikm1} + \ldots) - 2[(u_{m1} u_{ik1} + \ldots) + (u_{i1} u_{km1} + \ldots)$$
$$+ (u_{k1} u_{im1} + \ldots)]\} + 3 \sum_{i,k,m} v_i w_k t_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots)$$
$$+ \sum_{i,k,m} t_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,$$

où nous avons mis en évidence une partie *symétrique* par rapport aux trois systèmes distincts de solutions v, w, t, *partie qui, seule, renferme les dérivées du quatrième ordre de la fonction u.*

Les équations (4) entraînent donc toutes les équations du troisième ordre qu'on obtient en écrivant que la partie non symétrique du premier membre des relations précédentes ne varie pas par une permutation quelconque des solutions v, w, t. Chaque combinaison de trois lettres distinctes v, w, t donne deux de ces

relations, que nous écrivons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i,k,m} t_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} v_i w_k t_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) \\ &= \sum_{i,k,m} v_m \frac{\partial}{\partial x_m}(t_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} t_i w_k v_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) \\ &= \sum_{i,k,m} w_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i t_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} v_i t_k w_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots). \end{aligned}\right.$$

Ces équations, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$, sont-elles nouvelles, ou bien sont-elles des conséquences algébriques des équations (4)? C'est ce que nous allons examiner.

11. Il est nécessaire tout d'abord d'établir un certain nombre de conséquences des relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0 \qquad (v \neq w),$$

qui déterminent les rapports des v_i, w_i, ...

Différentions par rapport à x_m l'équation

$$\sum_i u_i v_i = 0,$$

nous aurons

$$\sum_i u_{im} v_i + \sum_i u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

et, ensuite, en multipliant par t_m et sommant convenablement,

$$\sum_{i,m} u_{im} v_i t_m + \sum_{i,m} u_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

on peut conclure, en tenant compte de la relation

$$\sum_{i,m} u_{im} v_i t_m = 0,$$

la relation

$$\sum_{i,m} u_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

que nous écrirons

$$(a_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0,$$

en posant

$$\delta_t \alpha = t_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}.$$

Il est bien entendu qu'*on n'a pas ici* $\delta_t \alpha = \delta_\alpha t$.

L'équation $\sum_i v_i w_i = 0$ donnera de même

$$\sum_i v_i \frac{\partial w_i}{\partial x_m} + \sum_i w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

puis

$$\sum_{i,m} v_i t_m \frac{\partial w_i}{\partial x_m} + \sum_{i,m} w_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_2) \qquad \sum_i v_i \delta_t w_i + \sum_i w_i \delta_t v_i = 0.$$

Partons maintenant de la relation

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0;$$

on en déduira par le même procédé

$$\sum_{i,k} u_{ikm} v_i w_k + \sum_{i,k} u_{ik} \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k) = 0,$$

puis

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} t_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k) = 0,$$

que nous écrirons

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_{i,k} u_{ik} \delta_t (v_i w_k) = 0,$$

ou encore

$$(a_3) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_i \delta_w u_i \delta_t v_i + \sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k = 0.$$

On déduira, en particulier, de ces dernières relations, en observant que $\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m$ est symétrique par rapport aux trois systèmes de solutions v, w, t, les deux relations

$$(a_4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_i \delta_w u_i \delta_t v_i + \sum_i \delta_v u_i \delta_t w_i \\ &= \sum_i \delta_w u_i \delta_v t_i + \sum_i \delta_t u_i \delta_v w_i \\ &= \sum_i \delta_v u_i \delta_w t_i + \sum_i \delta_t u_i \delta_w v_i. \end{aligned}\right.$$

Enfin, on déduira immédiatement de

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0$$

la relation

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k u_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} u_m \frac{\partial(v_i w_k)}{\partial x_m} = 0,$$

que nous écrirons

$$(a_5)\qquad \sum_{i,k} v_i w_k \delta_u u_{ik} + \sum_i \delta_w u_i \delta_u v_i + \sum_k \delta_v u_k \delta_u w_k = 0.$$

12. Les relations dont nous aurons besoin ensuite renfermeront explicitement les diverses racines λ_v, λ_w, ... de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0;$$

nous obtiendrons ces relations en partant du système

$$\sum_i u_i v_i = 0,$$

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On peut, en effet, en conclure par différentiation

$$\sum_k u_{ikm} v_k + \sum_k u_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + v_i \frac{\partial \lambda_v}{\partial x_m} + \mu_v u_{im} + u_i \frac{\partial \mu_v}{\partial x_m},$$

puis

$$\sum_{i,k} u_{ikm} v_k w_i + \sum_{i,k} u_{ik} w_i \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \sum_i w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \mu_v \sum_i u_{im} w_i,$$

et enfin

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} w_i t_m \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \sum_{i,m} w_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m},$$

que nous écrirons

$$(a_6) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m + \sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = \lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i.$$

Nous déduirons de la comparaison de cette relation avec l'expression déjà obtenue pour

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m \qquad [cf. (a_3)]$$

la nouvelle relation

$$\sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k = -\lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i.$$

On a de même

$$\sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = -\lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i,$$

et par conséquent aussi, d'après (a_2),

$$(a_7) \qquad \lambda_w \sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k + \lambda_v \sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = 0.$$

Portons les expressions que nous venons d'obtenir pour $\sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k$ et pour $\sum_k \delta_w u_k \delta_t u_k$ dans les relations (a_4), nous aurons

$$\begin{aligned} &\lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i + \lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i \\ &= \lambda_t \sum_i w_i \delta_v t_i + \lambda_w \sum_i t_i \delta_v w_i \\ &= \lambda_v \sum t_i \delta_w v_i + \lambda_t \sum_i v_i \delta_w t_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(a_8)\quad (\lambda_v-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_t v_i=(\lambda_t-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_v t_i=(\lambda_v-\lambda_t)\sum_i t_i\delta_w v_i=\Omega.$$

La valeur commune Ω de ces trois quantités est d'ailleurs, d'après (a_3) ou (a_6), la somme symétrique

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm}v_i w_k t_m.$$

Nous obtiendrons de même façon la relation

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm}w_i v_k u_m+\sum_{i,k,m} u_{ik}w_i u_m\frac{\partial v_k}{\partial x_m}$$
$$=\lambda_v\sum_{i,m} w_i\frac{\partial v_i}{\partial x_m}u_m+\mu_v\sum_{i,m} u_{im}w_i u_m,$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{i,k} w_i v_k\delta_u u_{ik}+\sum_k \delta_w u_k\delta_u v_k=\lambda_v\sum_i w_i\delta_u v_i+\mu_v\sum_i w_i\delta_u u_i.$$

Comme, d'autre part,

$$\sum_i u_{im}w_i=\lambda_w w_m+\mu_w u_m,$$

on aura

$$\sum_{i,m} u_{im}w_i u_m=\mu_w\sum_m u_m^2=\mu_w\delta_u u,$$

et il restera simplement

$$\sum_{i,k} w_i v_k\delta_u u_{ik}+\sum_k \delta_w u_k\delta_u v_k=\lambda_v\sum_i w_i\delta_u v_i+\mu_v\mu_w\delta_u u,$$

et si nous comparons cette relation avec (a_5) nous en conclurons

$$(a_9)\qquad -\sum_k \delta_v u_k\delta_u w_k=\lambda_v\sum_i w_i\delta_u v_i+\mu_v\mu_w\delta_u u.$$

13. Ces relations auxiliaires établies, nous revenons à l'examen

des équations (5). Nous commencerons par les écrire sous la forme abrégée

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[w_k(\delta_t v_i - \delta_v t_i) + v_i \delta_t w_k - t_i \delta_v w_k] \\ &\qquad\qquad + 3 \sum_{i,k,l} w_k u_{ikl}(v_i \delta_t u_l - t_i \delta_v u_l) = 0, \end{aligned} \right.$$

en posant, comme plus haut,

$$\delta_\alpha \beta = \alpha_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n}.$$

Les équations

$$(1)\qquad \sum u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i,$$

qui servent de définition aux λ et aux μ, donnent immédiatement

$$\delta_t u_l = \lambda_t t_l + \mu_t u_l,$$
$$\delta_v u_l = \lambda_v v_l + \mu_v u_l,$$

et la seconde partie du premier membre de l'équation (6) prend la nouvelle forme

$$\begin{aligned} &3(\lambda_t - \lambda_v) \sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l \\ &+ 3\mu_t \sum_{i,k} v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) \\ &- 3\mu_v \sum_{i,k} t_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k), \end{aligned}$$

quand on y remplace $\delta_t u_l$ et $\delta_v u_l$ par leurs expressions à l'aide des λ et μ; on voit qu'*en raison des relations du premier groupe*

$$\sum_{i,k} v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,$$

elle se réduit au seul terme

$$3(\lambda_t - \lambda_v) \sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l.$$

L'équation (6) s'écrit donc, après avoir divisé ses deux membres

par $(\lambda_t - \lambda_v)$, supposé différent de zéro,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_t - \lambda_v} \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[w_k(\delta_t v_i - \delta_v t_i) + v_i \delta_t w_k - t_i \delta_v w_k] = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous remarquons immédiatement que son premier terme renferme symétriquement les trois systèmes de solutions v_i, v_k, v_l; les deux équations (5) que nous avons formées pour les trois systèmes différents v, w, t se ramènent donc à l'équation précédente et à celle qu'on peut déduire en permutant deux lettres t et w ou v et w qui n'y figurent pas symétriquement. En éliminant la partie symétrique en v, w, t, on aura les équations du nouveau type

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda_t - \lambda_w) \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[w_k(\delta_t v_i - \delta_v t_i) + v_i \delta_t w_k - t_i \delta_v w_k] \\ &= (\lambda_t - \lambda_v) \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[v_k(\delta_t w_i - \delta_w t_i) + w_i \delta_t v_k - t_i \delta_w v_k], \end{aligned}\right.$$

qui s'écrivent encore, en groupant convenablement les termes, eu égard à l'arbitraire qui subsiste dans les indices sous le signe $\sum$,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i,k} w_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_v - \lambda_w)\delta_t v_i - (\lambda_t - \lambda_w)\delta_v t_i] \\ &+ \sum_{i,k} v_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_t - \lambda_v)\delta_w t_i - (\lambda_w - \lambda_v)\delta_t w_i] \\ &+ \sum_{i,k} t_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_w - \lambda_t)\delta_v w_i - (\lambda_v - \lambda_t)\delta_w v_i] = 0. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, *chaque combinaison de trois lettres distinctes* v, w, t *donne une équation du type* (7) *et une équation du type* (9).

14. Nous allons d'abord transformer ces dernières.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$U_{ik} = \delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k,$$

ce qui permet d'écrire les équations du premier groupe sous la

forme

$$\sum_{i,k} U_{ik} v_i w_k = 0.$$

Les relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0$$

nous donneront évidemment

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i,$$

en désignant par L_v, L_w, ... les racines d'une équation d'ordre $(n-1)$ facile à former [on déduit simplement cette équation de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

en y remplaçant u_{ik} par U_{ik}], racines toutes inégales d'ailleurs dans le cas général.

Portons ces valeurs de

$$\sum_k U_{ik} w_k, \quad \sum_k U_{ik} v_k, \quad \sum_k U_{ik} t_k$$

dans l'équation (9), elle deviendra

$$(10) \qquad \sum_i (L_w w_i + M_w u_i)[(\lambda_v - \lambda_w)\delta_t v_i - (\lambda_t - \lambda_w)\delta_v t_i] + \ldots = 0.$$

Mais nous avons établi plus haut les relations

$$(a_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0,$$

$$(a_2) \qquad (\lambda_v - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_t v_i = (\lambda_t - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_v t_i = (\lambda_v - \lambda_t)\sum_i t_i \delta_w v_i,$$

en partant des relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0,$$

qui définissent les rapports des v_i, w_k, ... Il en résulte que les

coefficients des éléments L_w, M_w, ... dans le premier membre de (10) sont tous nuls.

Les relations (10) *sont donc identiquement satisfaites.*

Il reste simplement à étudier les relations (7), qui sont en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$; nous nous servirons, pour les transformer, des relations

$$(a_1) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m = \lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i + \lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i,$$

qui s'écrivent, en tenant compte des

$$(a_2) \qquad \sum_i w_i \delta_t v_i + \sum_i v_i \delta_t w_i = 0,$$

sous la forme

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m = (\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i,$$

et aussi des relations

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i,$$

que nous venons d'établir.

Si, après avoir multiplié l'équation (7) par $(\lambda_t - \lambda_v)$, nous remplaçons respectivement

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i v_k t_l$$

et les sommes telles que $\sum_k U_{ik} w_k$ par leurs expressions données par les relations qu'on vient de rappeler, cette équation (7) prendra la forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3(\lambda_t - \lambda_v)(\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i \\ & \quad + L_w \sum_i w_i (\delta_t v_i - \delta_v t_i) + M_w \sum_i u_i (\delta_t v_i - \delta_v t_i) \\ & \quad + L_v \sum_k v_k \delta_t w_k \qquad + M_v \sum_k u_k \delta_t w_k \\ & \quad - L_t \sum_k t_k \delta_v w_k \qquad - M_t \sum_k u_k \delta_v w_k \qquad = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle se réduit immédiatement en vertu des relations (a_1) et (a_2) à

$$[3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)+L_w-L_v]\sum_i w_i\delta_t v_i+(L_w-L_t)\sum_i t_i\,\delta_v\,w_i=0,$$

et les relations (a_3), qui donnent

$$(\lambda_v-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_t v_i=(\lambda_w-\lambda_t)\sum_i t_i\delta_v w_i,$$

permettent de l'écrire définitivement sous la forme simple

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i w_i\delta_t v_i[3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t)\\&\qquad+L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w)]=0,\end{aligned}\right.$$

où la symétrie qu'elle présente est mise en évidence.

On en conclura donc, *sauf les cas, évidemment exceptionnels, où les racines des deux équations en* λ *et* L *sont liées par les* $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ *relations*

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}0=&\,3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t)\\&+L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w),\end{aligned}\right.$$

ou par quelques-unes d'entre elles, les relations

$$(14)\qquad \sum w_i\delta_t v_i=0,$$

où w, t, v sont trois lettres différentes.

Mais ces relations (14) sont précisément, ainsi qu'il résulte de l'identité rappelée plus haut,

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl}v_i w_k t_l=(\lambda_v-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_t v_i,$$

les relations

$$(15)\qquad \sum_{i,k,l} u_{ikl}v_i w_k t_l=0,$$

qui expriment, d'après M. Darboux [1], que les lignes de courbure

---

[1] Cf. *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, § 77, p. 136.

de chacune des surfaces $u =$ const. sont *coordonnées*. Nous avons donc établi, *dans le cas général, que les équations en nombre* $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ *qui constituent le second groupe d'équations envisagé par M. Darboux sont des conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe.*

15. Considérons maintenant le système des équations, en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$,

$$(15) \qquad \sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = 0,$$

où les rapports des v_i, w_k, t_l, ... sont définis par les relations

$$(\alpha) \qquad \sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0,$$

et proposons-nous d'en étudier directement les conséquences.

Nous avons vu que les relations qui déterminent les rapports des v_i, w_k, t_l, ... permettent à elles seules d'écrire

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = (\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i;$$

on peut donc conclure des relations (15) les équations

$$\sum_i w_i \delta_t v_i = 0.$$

On a, d'autre part, en vertu de ces mêmes relations (α),

$$(\alpha_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0.$$

Des relations

$$\sum_i \alpha_i \delta_t v_i = 0,$$

où α_i représente une des $(n-2)$ quantités w_i, ..., u_i (autres que v_i et t_i), on peut déduire immédiatement

$$(16) \qquad \delta_t v_i = A_v^{tv} v_i + A_t^{tv} t_i \qquad (i = 1, \ldots n),$$

en désignant par A_v^{tv} et A_t^{tv} deux coefficients convenables. Il suffit d'observer pour cela qu'on connaît deux systèmes de solutions linéairement indépendantes $X_i = t_i$ et $X_i = v_i$ pour les relations

$$\sum_i \alpha_i X_i = 0,$$

et que les déterminants d'ordre $(n-2)$ formés avec les coefficients de $(n-2)$ des X_i dans ces relations ne peuvent être nuls à la fois, puisque les $(n-2)$ directions définies par les systèmes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux à deux orthogonales.

Ces relations (16) sont extrêmement importantes; en voici une conséquence immédiate.

Considérons les deux équations linéaires aux dérivées partielles

$$V(f) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_v f = 0, \qquad T(f) = \sum_i t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_t f = 0;$$

elles formeront un système complet, puisque l'on a

$$[V, T] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\delta_v t_i - \delta_t v_i)$$

et que

$$\delta_v t_i - \delta_t v_i = (A_v^{vt} - A_v^{tv}) v_i + (A_t^{vt} - A_t^{tv}) t_i;$$

elles ont par conséquent $(n-2)$ solutions communes. On conclut de là en raisonnant de proche en proche que le système formé des $(n-2)$ équations

$$\delta_v f = 0, \qquad \delta_t f = 0, \qquad \ldots$$

(d'où l'on a exclu $\delta_u f$ et $\delta_w f$) est complet et admet deux solutions distinctes. On sait que la fonction u est l'une de ces solutions, soit w l'autre; on pourra évidemment écrire, puisque l'on a

$$\sum v_i w_i = 0, \qquad \sum t_i w_i = 0, \qquad \ldots$$

et que les w_i ne sont définis qu'à un facteur près,

$$w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} + N_w \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Pour que les w_i soient les dérivées d'une même fonction, il faudrait donc en outre

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} = \frac{\partial N_w}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial N_w}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$N_w = F_w(u).$$

La relation

$$\sum u_i w_i = 0$$

donne d'ailleurs la valeur de N_w, puisqu'elle peut s'écrire

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} + N_w \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Si l'on veut que les w_i, v_i, t_i, ..., dont les rapports sont donnés par les relations (α), soient, en tenant compte des équations (15) qui expriment que les surfaces $u =$ const. ont leurs lignes de courbure coordonnées, les dérivées de fonctions W, V, T, ..., *il faut donc ajouter au système* (15) *les* $(n-1)$ *équations nouvelles*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial N_w}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial N_w}{\partial x_i} = 0,$$

où l'on a posé

$$N_w = -\frac{\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}}{\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2},$$

la fonction w étant complètement définie par un système complet à deux solutions distinctes u et w, dont les coefficients sont précisément les w_i, t_i, ... connus au moyen des dérivées premières et secondes de u.

16. Revenons aux formules établies par M. Darboux (*Syst. orth.*, n°s 72, 73); nous y remarquons l'identité

$$\begin{pmatrix} u, & v \\ & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u, & w \\ & u \end{pmatrix} = \delta_u u \begin{pmatrix} w, & v \\ u, & u \end{pmatrix},$$

qui s'écrit, lorsqu'on ordonne par rapport aux puissances des v_i, w_k,

$$(\alpha) \qquad \sum_{i,k} v_i w_k (\delta_u u\, \delta_{u_i} u_k - \delta_u u_i\, \delta_u u_k) = 0,$$

et *qui permet de ramener les équations du premier groupe à la forme*

$$\sum_{i,k} v_i w_k H_{ik} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{H^2} = \delta_u u = \sum_i u_i^2.$$

Cette identité (α) est déduite par M. Darboux d'une relation plus générale où l'on a dû supposer les v_i, w_i, ... proportionnels aux dérivées d'une même fonction, c'est-à-dire n'est établie que dans l'hypothèse où les surfaces $u =$ const. font partie d'un système complètement orthogonal, mais *il est manifeste qu'elle subsiste dans tous les cas.*

Nous avons en effet, dans tous les cas,

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i,$$

et par conséquent,

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i v_k = \mu_v \sum_i u_i^2 = \mu_v \delta_u u;$$

on aura de même

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i w_k = \mu_w \delta_u u,$$

et, par suite, en multipliant membre à membre,

$$\begin{pmatrix} u, v \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u, w \\ u \end{pmatrix} = \mu_v \mu_w (\delta_u u)^2.$$

Mais, d'autre part, les relations

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i, \qquad \sum_k u_{ik} w_k = \lambda_w w_i + \mu_w u_i$$

donnent, quand on les multiplie membre à membre et qu'on fait la sommation par rapport à i,

$$\begin{pmatrix} v, & w \\ u, & u \end{pmatrix} = \sum_i \delta_v u_i \delta_w u_i = \lambda_v \lambda_w \sum_i v_i w_i + \lambda_v \mu_w \sum_i v_i u_i$$
$$+ \lambda_w \mu_v \sum_i w_i u_i + \mu_v \mu_w \sum_i u_i^2,$$

c'est-à-dire simplement

$$\begin{pmatrix} v, & w \\ u, & u \end{pmatrix} = \mu_v \mu_w \delta_u u.$$

On a donc bien, dans tous les cas, comme nous l'avons annoncé,

$$\begin{pmatrix} u, & v \\ u & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u, & w \\ u & \end{pmatrix} = \delta_u u \begin{pmatrix} v, & w \\ u, & u \end{pmatrix}.$$

Cette remarque nous sera utile pour l'examen du cas particulier où les surfaces $u =$ const. forment une famille de surfaces *parallèles,* c'est-à-dire satisfont à l'équation

$$\delta_u u = 1.$$

Si l'on suppose que les surfaces $u =$ const. sont parallèles, on aura les égalités successives

$$\sum_i u_i^2 = 1, \qquad \sum_i u_i u_{ik} = 0,$$
$$\sum_i u_i u_{ikl} + \sum_i u_{il} u_{ik} = 0,$$

et, par conséquent, on peut conclure des relations

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i v_k = \mu_v \sum_i u_i^2$$

que *tous les coefficients* μ_v, μ_w, ... *sont nuls.* On sait qu'alors aussi toutes les équations du premier groupe de M. Darboux, qui peuvent s'écrire

$$\sum_{i,k} v_i w_k H_{ik} = 0,$$

sont vérifiées et qu'il n'en est pas de même des équations du second groupe,

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = 0,$$

qui expriment que les lignes de courbure de chacune des surfaces $u =$ const. sont *coordonnées*.

Comment expliquer ce fait?

Nous avons, dans le cas qui nous occupe,

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i$$

et aussi

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i.$$

Mais ici, d'après une égalité écrite plus haut,

$$U_{ik} = (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = -3\delta_{u_i} u_k = -3\sum_j u_{ij} u_{kj};$$

il en résulte donc

$$\sum_k U_{ik} v_k = -3\sum_{j,k} u_{ij} u_{kj} v_k,$$

ou encore

$$\sum_k U_{ik} v_k = -3\sum_j u_{ij} \lambda_v v_j = -3\lambda_v^2 v_i.$$

On a par suite

$$-3\lambda_v^2 v_i = L_v v_i + M_v u_i,$$

et il est facile de montrer que M_v *est nul :* cela résulte de la suite d'égalités

$$\sum_{i,k} U_{ik} u_i v_k = -3\lambda_v^2 \sum_i u_i v_i = 0 = L_v \sum_i u_i v_i + M_v \sum_i u_i^2.$$

Les fonctions $L_1, \ldots, L_{n-1}$ sont donc telles que

$$L_v = -3\lambda_v^2,$$

et *cela suffit à expliquer le paradoxe apparent.*

On connaît en effet l'identité algébrique

$$(a-b)(b-c)(c-a)+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0,$$

et il suffira de remplacer L_v, L_w, L_t, ... par leurs valeurs dans les équations (12),

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i w_i \delta_t v_i [3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t) \\ &\qquad + L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w)]=0, \end{aligned} \right.$$

pour reconnaître que *tous les seconds facteurs sont identiquement nuls.*

On ne peut donc pas conclure, *dans ce cas particulier,* des conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe, les relations

$$\sum_i w_i \delta_t v_i = 0$$

qui constituent le second groupe d'équations de M. Darboux, c'est-à-dire que les équations du premier groupe ne sont pas suffisantes pour que les surfaces

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

fassent partie d'un système complètement orthogonal.

17. Les résultats analytiques que nous venons d'obtenir conduisent à quelques questions qu'il serait intéressant d'élucider; nous nous bornerons ici à les énoncer.

On a établi que les équations qui constituent le premier groupe de M. Darboux forment un système différentiel *décomposable,* en ce sens qu'on obtient les conditions d'intégrabilité de ces équations en égalant à zéro un produit de deux facteurs, ce qui donne lieu à des conclusions différentes suivant qu'on annule l'un ou l'autre de ces facteurs. Il en résulte que le système initial conduit à un très grand nombre de systèmes distincts : les extrêmes, qu'on obtient en annulant tous les facteurs de même type, sont compatibles et nous connaissons la signification géométrique de l'un d'eux, relatif aux systèmes complètement orthogonaux. Quelle est celle de

l'autre? Combien y a-t-il de systèmes compatibles distincts? Comment les obtient-on? Quelle est leur signification géométrique?

Quelle est également la signification géométrique de l'équation en L, analogue à celle qui détermine les directions principales sur une variété

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

que nous avons rencontrée?

REMARQUE SUR LES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QU'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AIT SES POINTS CRITIQUES FIXES;

PAR M. HENRI DULAC.

Les raisonnements par lesquels on établit les conditions pour qu'une équation différentielle du premier ordre n'ait pas de points critiques mobiles présentent une lacune qui pourrait faire craindre que, dans certains cas particuliers, les conditions habituellement énoncées ne soient pas nécessaires. Considérons l'équation $F(y', y, x) = 0$, algébrique en y' et y. Supposons que pour $y = g(x)$ plusieurs valeurs de y' deviennent égales. Soit

$$z = y - g(x).$$

Plusieurs valeurs de z' deviennent égales pour $z = 0$. Supposons que ν de ces valeurs se permutent entre elles, lorsqu'on tourne autour de $z = 0$. Si nous posons $z = Z^\nu$, nous aurons

$$(1) \qquad \nu Z^{\nu-1} Z' = A_s(x) Z^s + A_{s+1}(x) Z^{s+1} + \ldots;$$

s est un entier positif, négatif ou nul, les $A(x)$ sont des fonctions que nous pouvons supposer holomorphes dans le voisinage d'une valeur $x = a$. Supposons qu'on ait $q = \nu - s - 1 > 0$. L'intégrale $Z(x)$, qui pour $x = x_0$ prend la valeur $Z = 0$, est une fonction algébroïde de x à $q + 1$ valeurs. On en conclut [1] qu'il en

---

[1] FUCHS, *Berlin. Berichte*, t. XXXII, 1884, p. 703. — HAMBURGER, *Journal de Crelle*, t. 112, 1893, p. 212-216. — PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 54.

est de même pour $z = Z^\nu$. Cette conclusion peut être fausse dans certains cas. Si nous considérons par exemple l'équation

$$z' = 2z^{\frac{2}{4}} + xz^{\frac{3}{4}} - z^{\frac{5}{4}},$$

pour laquelle on a $\nu = 4$, $s = 2$, $q = 1$, on vérifie facilement que l'intégrale $z = x^2$ est la seule intégrale $z(x)$ nulle pour $x = 0$; c'est une fonction holomorphe et non une fonction algébroïde à deux valeurs.

Je vais montrer que cette circonstance exceptionnelle ne peut se présenter que pour des valeurs isolées et fixes de x_0. L'existence de pareilles valeurs de x_0, pour lesquelles les raisonnements habituels sont en défaut, ne changera donc rien aux conditions nécessaires pour que l'équation n'ait pas de points critiques mobiles : il faut qu'on ait $s \geqq \nu - 1$. Pour établir la conclusion que j'ai en vue, on peut, en considérant le développement fourni par l'équation (1),

$$Z = c_1(x - x_0)^{\frac{1}{q+1}} + c_2(x - x_0)^{\frac{2}{q+1}} + \ldots,$$

chercher à reconnaître dans quel cas, contrairement à l'affirmation de Fuchs et de M. Hamburger, $z = Z^\nu$ est une fonction à moins de $q + 1$ déterminations. Cette façon de procéder présente quelques longueurs. Il nous sera plus commode de développer le raisonnement par lequel M. Painlevé (passage cité) démontre qu'en général z est une fonction à $q + 1$ déterminations.

Nous pouvons écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad z' = B_0(x, z) + B_1(x, z)Z + B_2(x, z)Z^2 + \ldots + B_{\nu-1}(x, z)Z^{\nu-1},$$

en posant

$$(3) \qquad z = Z^\nu;$$

$B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}$ sont des fonctions holomorphes pour $x = a$, $y = 0$. En général, à chacune des valeurs de Z vérifiant l'équation (3) correspond d'après (2) une valeur distincte de z'. Par suite, Z s'exprime en fonction rationnelle de z' et des coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}$. Il est donc impossible que z soit une fonction ayant moins de $q + 1$ déterminations, si Z est une fonction à $q + 1$ déterminations. Ce raisonnement ne serait jamais en défaut, si l'on n'était pas obligé de considérer z comme une foncti on de x

En effet, si, laissant x fixe, on fait tourner z autour de $z=0$, l'équation (2) fournit par hypothèse ν valeurs distinctes de z' correspondant aux ν valeurs distinctes que prend Z. Mais nous ne pouvons raisonner ainsi; nous devons considérer z comme une fonction de x et il peut se faire que cette fonction soit telle que pour chaque valeur de x et pour les valeurs correspondantes de z et z' les équations (2) et (3) aient plusieurs racines communes. Dans ce cas, z pourra avoir moins de $q+1$ valeurs, alors que Z en a $q+1$.

Remarquons maintenant que si, dans (2), z' reprend la même valeur pour deux valeurs Z et ωZ, racines de l'équation (3) (ω est une racine d'ordre ν de l'unité), on aura

$$(\omega-1)B_1(x,Z^\nu)Z+(\omega^2-1)B_2(x,Z^\nu)Z^2+\ldots+(\omega^{\nu-1}-1)B_{\nu-1}(x,Z^\nu)Z^{\nu-1}=0.$$

Le premier membre de cette expression est divisible par $\omega-1$ et par une certaine puissance de Z; une fois la division effectuée, nous obtenons

$$C_0(x)+Z\,C_1(x)+Z^2\,C_2(x)+\ldots=0.$$

Le premier membre de cette relation est une série ordonnée suivant les puissances de Z; les coefficients C_0, C_1, ... sont des fonctions connues de x, holomorphes pour $x=a$. Cette relation ne peut être vérifiée par une fonction $Z(x)$ nulle pour $x=x_0$ que si l'on a $C_0(x_0)=0$.

Ce n'est donc que pour des valeurs fixes de x_0, vérifiant la relation $C_0(x_0)=0$, que z peut avoir moins de $q+1$ déterminations tandis que Z en a $q+1$. En particulier, ce n'est que pour des valeurs fixes x_0 que l'intégrale $z(x)$, prenant pour $x=x_0$ la valeur $z=0$, peut être uniforme pour $x=x_0$, si l'on n'a pas $s\geqq\nu-1$.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. J. LE ROUX.

1. Pour exprimer qu'un système d'équations linéaires est incompatible ou indéterminé, il suffit d'écrire que les équations homogènes, obtenues en négligeant dans ce système les termes indépendants des inconnues, admettent des solutions non nulles.

Cette remarque si simple et si évidente permet de former les équations caractéristiques des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles.

Considérons un système S quelconque, à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et p fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Nous supposerons simplement que le système ait été mis sous forme complètement intégrable par des différentiations et des éliminations successives.

Si les équations ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé r_i de chacune des fonctions inconnues u_i, nous raisonnerons sur le système auxiliaire de M. Darboux, qui présente, au point de vue de l'indétermination, les mêmes caractères que le système S, et qui est toujours linéaire et homogène.

Pour déterminer les valeurs que prennent en un point les fonctions u et leurs dérivées, il faut joindre aux équations du système S les équations additionnelles qui se déduisent de la considération des fonctions initiales.

Supposons qu'on ait calculé pour u_1 toutes les dérivées d'ordre inférieur à r_1, pour u_2 les dérivées d'ordre inférieur à r_2, etc. Il s'agit de calculer les dérivées des ordres $r_1, r_2, \ldots$ des fonctions $u_1, u_2, \ldots$.

Les équations additionnelles peuvent se mettre sous une forme que nous allons indiquer, en supposant d'abord que les fonctions initiales soient des fonctions arbitrairement données sur une variété A à $n-1$ dimensions.

Soit v_i une dérivée d'ordre $r_i - 1$ de la fonction u_i. On formera la différentielle

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n} dx_n.$$

Cette différentielle a, au point considéré, une valeur déterminée quand $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sont les composantes d'un déplacement infinitésimal sur la variété A, c'est-à-dire quand on a entre les quantités dx_i une relation de la forme

$$(1) \qquad h_1\,dx_1 + h_2\,dx_2 + \ldots + h_n\,dx_n = 0.$$

Si les équations ainsi formées, jointes à celles qu'on déduit du système (S), constituent un système incompatible ou indéterminé, les équations linéaires et homogènes

$$(2) \qquad dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n}\,dx_n = 0,$$

dans lesquelles les coefficients dx_i sont liés par la relation (1), admettent des solutions non nulles, et ces solutions vérifient les équations linéaires et homogènes qu'on déduit du système (S) quand on y néglige les termes qui ne contiennent pas les dérivées de l'ordre le plus élevé de chacune des fonctions inconnues.

Observons maintenant que les premiers membres des équations (1) et (2) linéaires et homogènes par rapport aux différentielles dx_k s'annulent pour les mêmes valeurs de ces différentielles. Nous pouvons en conclure que les coefficients sont proportionnels.

La différentielle $d^{r_i}u_i$ qu'on formerait avec les valeurs des dérivées satisfaisant aux équations de la forme (2) se réduirait donc, à un facteur près, à une puissance du premier membre de l'équation (1) :

$$(3) \qquad d^{r_i}u_i = \lambda_i(h_1\,dx_1 + h_2\,dx_2 + \ldots + h_n\,dx_n)^{r_i}.$$

Remplaçons dans les équations du système (S), réduites, comme nous l'avons indiqué, à leurs termes de l'ordre le plus élevé, les dérivées d'ordre r_i de u_i par les valeurs qu'on déduit des identités (3). Les résultats obtenus sont linéaires et homogènes par rapport aux multiplicateurs λ_i.

L'élimination des multiplicateurs n'est pas toujours possible dans les systèmes où il existe plusieurs fonctions inconnues. Quand elle est possible, elle donne les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de l'équation (1) pour que le problème de Cauchy se présente sous forme indéterminée. Ce sont les *équations caractéristiques*.

On verra facilement que la méthode de M. Hadamard [1], quand elle est applicable, donne exactement les mêmes résultats.

2. Appliquons notre méthode aux équations de la déformation des surfaces, exemple traité par M. Hadamard. Le système à résoudre, prolongé jusqu'au second ordre pour le ramener à la forme complètement intégrable, est de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\mathrm{E},\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\mathrm{F},\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\mathrm{G},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v},\\
&\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2}.
\end{aligned}\right.$$

Le calcul des dérivées premières ne donne pas d'équations caractéristiques; celui des dérivées secondes conduit, après l'élimination des multiplicateurs, à l'équation caractéristique

$$(5)\quad \begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\\
\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\\
\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}
\end{vmatrix}=0,$$

---

[1] HADAMARD, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, p. 48.

en supposant l'équation entre les différentielles du et dv, analogue à l'équation (1), mise sous la forme

$$h\,du + k\,dv = 0. \tag{6}$$

L'élimination de h et k entre les deux équations (5) et (6) donne immédiatement l'équation des lignes asymptotiques sous la forme habituelle.

3. Les équations caractéristiques en h_1, h_2, ... peuvent être considérées comme définissant tangentiellement des variétés algébriques dans l'espace à n dimensions homogènes. Les méthodes ordinaires permettent de passer des équations tangentielles aux équations ponctuelles, homogènes par rapport aux différentielles dx_1, dx_2, ... Ces équations aux différentielles sont vérifiées par les *bicaractéristiques* de M. Hadamard.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles linéaires, les équations caractéristiques exprimées en variables tangentielles peuvent être assimilées à des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il serait intéressant d'examiner si ces équations forment un système intégrable. Le fait est assez vraisemblable, si l'on réfléchit au rôle que jouent dans l'intégration d'une équation unique les intégrales complètes de l'équation caractéristique [1].

4. Il existe une généralisation immédiate des équations caractéristiques, à laquelle on se trouve conduit en supposant que les fonctions initiales soient données sur des variétés à moins de $n-1$ dimensions.

Les différentielles dx_i sont alors liées par plusieurs relations de la forme (1). Supposons qu'il en existe k :

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_k = 0,$$

en posant

$$P_j = h_{1,j}\,dx_1 + h_{2,j}\,dx_2 + \ldots + h_{n,j}\,dx_n.$$

Un raisonnement semblable à celui dont nous avons fait usage dans le premier cas nous montre que la différentielle $d^{r_i}u_i$ est

---

[1] Voir *Journal de Math.*, 5e série, t. VI, p. 387.

alors une fonction homogène d'ordre r_i des formes $P_1, P_2, \ldots, P_k$. L'élimination des coefficients de ces formes, si elle est possible, donnera les équations caractéristiques généralisées.

On peut avoir encore à considérer des cas où les fonctions initiales seraient définies d'une manière différente pour chaque fonction inconnue. Notre méthode s'appliquerait aussi à ces cas très généraux.

SUR LA GÉNÉRATION DES MÉTRIQUES;

PAR M. G. COMBEBIAC.

Les lignes qui jouent le rôle d'axes dans une métrique hyperbolique (c'est-à-dire justiciable de la doctrine de Lobatchewsky) doivent posséder les propriétés géométriques attribuées aux lignes droites, à l'exception de celle qui est exprimée par le postulatum. On se propose de démontrer qu'elles doivent remplir en outre une autre condition, qui se substitue, dans ce cas, au postulatum, de sorte que celui-ci devient un cas singulier de la condition d'existence d'une métrique; lorsque cette condition supplémentaire est remplie, la métrique est complètement déterminée par ses axes.

I.

Pour obtenir de telles lignes, il suffit d'établir une correspondance parfaite et continue entre l'espace entier et le volume V intérieur à une surface fermée convexe S. Les lignes D qui correspondent, dans l'espace, aux segments rectilignes contenus dans le volume V satisfont aux conditions requises, savoir : détermination par deux points et existence de surfaces jouant le rôle des plans.

Ces propriétés suffisent pour permettre d'établir une géométrie projective par rapport aux lignes considérées en suivant pas à pas l'œuvre de Von Staudt et en n'utilisant, par conséquent, que la notion d'intersection à l'exclusion de toute idée métrique.

On peut d'ailleurs, pour l'étude de ces lignes, substituer l'analyse aux procédés géométriques en établissant au préalable, au moyen

de la méthode indiquée par Von Staudt, un système de coordonnées projectives faisant correspondre trois nombres réels X, Y, Z à tout point de l'espace, à l'exception des points situés sur un certain *plan* et pour lesquels les coordonnées prennent à la limite des valeurs infinies. Un tel système est défini par trois axes concourants sur chacun desquels deux des coordonnées ont des valeurs nulles, par le *plan* des coordonnées infinies et par le *plan* qui a pour équation, par exemple,

$$X + Y + Z = 1.$$

A tout système de valeurs réelles (X, Y, Z) ne correspond pas nécessairement un point de l'espace. C'est ainsi qu'une équation linéaire à coefficients réels pourra n'être satisfaite par les coordonnées d'aucun point de l'espace; mais elle n'en déterminera pas moins, pour deux faisceaux quelconques de lignes D, une correspondance bien définie et ayant toutes les propriétés projectives qui caractérisent les correspondances déterminées de cette manière par des *plans* réels (correspondances homographiques présentant certaines propriétés particulières). L'observation s'applique également aux équations quelconques, et rien n'empêche d'étendre, pour la généralité du langage, la dénomination de surface aux entités géométriques ainsi définies et dont chacune détermine, à défaut de points, une correspondance entre deux faisceaux quelconques de lignes D. Si l'équation est algébrique, la correspondance pourra être définie au moyen de propriétés projectives, c'est-à-dire ne mettant en jeu que la notion d'intersection. Enfin, moyennant cette interprétation, on peut dire que toute surface algébrique est transformée par une transformation projective en une surface du même degré.

Le système de coordonnées ainsi établi réalise aussi une représentation du volume V, puisque toute construction projective dans l'un des domaines a une correspondante dans l'autre, l'application étant supposée parfaite et continue. La surface S est formée de points-limites du volume V; par suite, la surface (au sens étendu qui a été défini) qui lui correspond et son équation

$$f(X, Y, Z) = 0 \tag{1}$$

sont parfaitement déterminées comme limites en fonction des

lignes D (on pourrait ne s'attacher qu'à l'un des points de vue, analytique ou constructif). L'équation (1) représente, en définitive, la correspondance à double détermination qui existe entre une ligne D d'un faisceau et les lignes D d'un autre faisceau qui rencontrent la première à l'infini, correspondance elle-même bien déterminée puisque les secondes lignes le sont comme positions-limites. L'existence et la signification de l'équation (1) sont donc bien établies. On dira que cette équation représente les *points à l'infini* ou la *surface de l'infini* relative aux lignes D.

On pourrait supposer que la surface S, au lieu d'être fermée, s'étende à l'infini tout en étant convexe vers la région extérieure au volume V. Celui-ci s'étendrait alors à l'infini, de sorte que, pour avoir la *surface* bornant ce volume, il faudrait joindre à l'équation (1) celle du plan de l'infini de l'espace auquel appartient le volume V. Ces deux équations (abstraction faite des éléments impropres qui ne sont pas points-limites du volume V) représentent également la surface de l'infini relative aux lignes D; cette surface ne se réduira donc à une surface du premier ordre que si la surface S se confond elle-même avec le plan de l'infini de l'espace qui la contient. Dans ce cas, les lignes D, d'après leur génération même, seront les correspondantes des lignes droites dans une application parfaite et continue de l'espace sur lui-même, et, par suite, elles satisferont au postulatum.

Réciproquement, il est évident que les lignes D ne satisferont au postulatum que dans ce cas.

Le postulatum est donc équivalent à cette proposition : *la surface de l'infini est du premier ordre,* c'est-à-dire : la correspondance établie par la rencontre à l'infini entre les lignes de deux faisceaux est homographique et possède toutes les propriétés de celles qui sont déterminées par la rencontre sur un plan donné.

Sous cette forme particulièrement positive, le postulatum apparaît avec son vrai caractère, qui est nettement projectif.

II.

Cherchons à définir une métrique hyperbolique ayant pour axes les lignes D. L'expression de la distance doit, comme on sait,

être de la forme

$$(2) \qquad F = c \log \frac{\Omega_{XX'} + \sqrt{\Omega_{XX'}^2 - \Omega_{XX}\,\Omega_{X'X'}}}{\Omega_{XX'} - \sqrt{\Omega_{XX'}^2 - \Omega_{XX}\,\Omega_{X'X'}}} \text{ (1)},$$

où Ω_{XX} est une expression quadratique en X, Y, Z; $\Omega_{X'X'}$ et $\Omega_{XX'}$ les expressions correspondantes en X′, Y′, Z′ et X, Y, Z, X′, Y′, Z′; on supposera en outre que Ω corresponde à un ellipsoïde réel.

Pour que les axiomes habituels soient satisfaits (notamment, il doit toujours exister, sur un axe quelconque, à partir d'un point quelconque et dans un sens donné, un et un seul segment égal à un segment donné), il faut que l'expression (2) prenne des valeurs réelles pour tout couple de points et devienne infinie lorsque l'un des points s'éloigne indéfiniment. Il faut donc que la surface de l'infini se confonde avec celle qui est déterminée par l'équation

$$\Omega_{XX} = 0.$$

Il est donc nécessaire que les lignes D soient telles que la surface de l'infini qu'elles déterminent soit du second ordre (par rapport à ces lignes), condition susceptible d'une définition projective et qui se rapporte en définitive à la correspondance déterminée entre deux faisceaux quelconques de lignes D par la condition d'intersection à l'infini.

Dans le système de coordonnées employé, Ω_{XX} sera alors déterminé à un facteur constant près, qui est sans effet sur la métrique correspondante; celle-ci sera donc également déterminée.

Cherchons maintenant à définir une métrique parabolique ayant pour axes des lignes D données.

On obtient une telle métrique en prenant pour la distance une expression de la forme

$$\sqrt{\frac{\Omega_{XX}}{R_X^2} + \frac{\Omega_{X'X'}}{R_{X'}^2} - 2\,\frac{\Omega_{XX'}}{R_X\,R_{X'}}},$$

où R est un polynome du premier degré à coefficients réels. Cette

(1) X, Y, Z sont des nombres; c est une *longueur* (au sens relatif à la métrique considérée), savoir celle du segment pris sur l'axe des X à partir de l'origine et ayant pour extrémité le point qui forme, avec l'origine et les points de rencontre de cet axe avec l'ellipsoïde Ω, un rapport anharmonique égal à e.

expression ne change pas de valeur lorsqu'on y remplace Ω par $\Omega + \lambda R^2$, où λ est une constante arbitraire, c'est-à-dire lorsqu'on substitue à la quadrique déterminée par Ω une autre quadrique passant par l'intersection de la première avec le plan R et pour laquelle on peut prendre un cône; on peut donc écrire Ω sous la forme de trois carrés qu'on supposera tous positifs,

$$\Omega = \Sigma A_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \Omega_{XX'} = \Sigma A_{iX} A_{iX'};$$

enfin on peut prendre pour plan des coordonnées infinies le plan R, c'est-à-dire réduire R à une constante. L'expression précédente peut donc toujours être mise sous la forme

$$(3) \qquad \sqrt{\Sigma (A_{iX'} - A_{iX})^2};$$

les termes constants des polynomes A_i peuvent d'ailleurs être supprimés.

Cette expression ne prend des valeurs infinies que lorsque l'un des points appartient au plan des coordonnées infinies; ce plan doit donc se confondre avec la surface de l'infini et, par suite, les lignes D doivent satisfaire au postulatum, d'après l'équivalence établie plus haut de ce dernier. Cette condition étant remplie, toute expression de la forme (3) définira une métrique parabolique ayant pour axes les lignes données.

Les résultats de ces deux paragraphes peuvent être résumés de la manière suivante :

Pour que des lignes possédant les mêmes propriétés géométriques que les lignes droites, abstraction faite du postulatum, puissent être les axes d'une métrique, il faut et il suffit que la surface de l'infini qu'elles déterminent en raison de leurs propriétés projectives soit du premier ou du second ordre. Dans le second cas, elles donnent lieu à une et une seule métrique, qui est hyperbolique; dans le premier cas, elles peuvent servir d'axes à une infinité de métriques paraboliques correspondant respectivement aux diverses coniques *imaginaires situées dans le* plan *de l'infini.*

Ces conclusions s'étendent évidemment à tous les continus à n dimensions applicables exactement sur l'ensemble formé par les systèmes de valeurs réelles de n nombres.

Il est facile de reconnaître que les métriques elliptiques (dans les continus qui les admettent) ne donnent pas lieu à de semblables conditions. C'est ainsi qu'en Géométrie sphérique, par exemple, si l'on prend pour coordonnées projectives (homogènes), par rapport aux grands cercles, les coordonnées rectangulaires d'un point, l'origine des coordonnées étant le centre de la sphère, on pourra toujours prendre pour expression d'une distance

$$2c \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}{\Omega_{xx'}},$$

où Ω est une expression quadratique à coefficients réels et à valeurs toujours positives; on obtient la métrique sphérique ordinaire en prenant

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 + z^2.$$

III.

La propriété projective qui se substitue au postulatum dans les métriques hyperboliques peut être établie au moyen des procédés ordinaires de la Géométrie non euclidienne.

Si x, y, z désignent, en métrique de Lobatchewsky, les longueurs interceptées sur trois axes rectangulaires Ox, Oy et Oz par les perpendiculaires abaissées d'un point M sur ces axes, on obtient un système de coordonnées projectives en prenant

$$X = \operatorname{th}\frac{x}{2c}, \qquad Y = \operatorname{th}\frac{y}{2c}, \qquad Z = \operatorname{th}\frac{z}{2c}.$$

On reconnaît en effet facilement, en s'appuyant sur les formules connues de résolution des triangles en métrique de Lobatchewsky, que les axes (ou lignes droites) sont représentés par des équations de la forme

$$X = a + bt, \qquad Y = a' + b't, \qquad Z = a'' + b''t.$$

D'autre part, on vérifie aussi, au moyen des formules relatives aux triangles rectangles, que, si ρ désigne la distance du point x, y, z à l'origine, on a

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{2c} = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{x}{2c} + \operatorname{th}^2\frac{y}{2c} + \operatorname{th}^2\frac{z}{2c}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

La surface de l'infini a donc pour équation

$$\Omega_{XX} \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0,$$

et, par suite, est bien une quadrique.

Les systèmes de coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) ne réalisent ni l'un ni l'autre une représentation parfaite de l'espace, puisqu'aucun point réel ne correspond aux systèmes de valeurs pour lesquels on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 \geqq 0.$$

On obtient, au contraire, un système de coordonnées satisfaisant à cette condition en posant

$$x' = \frac{X}{R}\log\frac{1+R}{1-R}, \qquad y' = \frac{Y}{R}\log\frac{1+R}{1-R}, \qquad z' = \frac{Z}{R}\log\frac{1+R}{1-R}$$

$$(R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}),$$

ce qui donne

$$X = \frac{x'}{r'}\frac{e^{r'}-1}{e^{r'}+1} = \frac{x'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}, \qquad Y = \frac{y'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}, \qquad Z = \frac{z'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}$$

$$(r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}).$$

Réciproquement, l'espace étant rapporté à un système de coordonnées (x', y', z') réalisant une représentation parfaite et continue, les formules précédentes définiront une métrique hyperbolique. Si, en particulier, x', y', z' sont des coordonnées trirectangulaires ordinaires, on voit que les droites passant par l'origine sont des axes de la métrique; pour deux points situés sur l'une de ces droites, c'est-à-dire tels qu'on ait, pour chacun d'eux,

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} = \frac{r'}{R},$$

on trouve, pour expression de la distance, $r'_2 - r'_1$; la métrique considérée se confond donc, pour ces points, avec la métrique ordinaire.

Le plan des xy est une surface d'axes et les axes situés dans ce plan ont pour équation générale

$$\frac{1}{r'}\frac{e^{r'}-1}{e^{r'}+1}(Ax' + By') + C = 0.$$

On peut suivre sur cet exemple toutes les propriétés qui font l'objet de la Géométrie non euclidienne avec l'avantage appréciable de raisonner sur des concepts et non pas seulement sur des combinaisons de mots.

Pour les continus à une dimension ouverts (applicables exactement sur l'ensemble des nombres réels), les deux expressions de la distance peuvent s'écrire

$$\log \frac{a - X'}{X' - b} - \log \frac{a - X}{X - b} \qquad \text{et} \qquad X' - X.$$

Elles sont évidemment réductibles l'une à l'autre et *ne donnent lieu,* par conséquent, *à aucun classement des métriques.* Si x et x' désignent les distances de deux points, dans une métrique déterminée, à un point O pris pour origine, les deux expressions précédentes rentrent dans la formule générale

$$f(x') - f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction croissante ou décroissante, toujours déterminée et prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

On voit qu'une telle métrique est toujours archimédienne, la quantité

$$n[f(b) - f(a)]$$

croissant indéfiniment avec le nombre entier n.

Pour qu'un ensemble ordonné M admette des métriques archimédiennes, il faut, non seulement qu'il soit applicable sur lui-même de manière qu'on puisse faire se correspondre deux éléments quelconques (condition évidente d'existence des métriques), mais il faut encore que, si l'on forme un ensemble ordonné en mettant à la suite l'un de l'autre n ensembles identiques à un segment quelconque de M, le dernier élément de chaque ensemble coïncidant avec le premier élément du suivant, l'ensemble ainsi formé puisse être appliqué sur l'ensemble M de manière à englober, pour n suffisamment grand, deux éléments quelconques de M.

Cette condition, évidemment indépendante de toute idée métrique, est remplie pour les continus; elle ne l'est pas pour l'ensemble ordonné de fonctions cité comme exemple par M. Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie.*

Si je signale ces remarques particulièrement évidentes, c'est

moins pour leur intérêt propre que parce qu'elles donnent une idée de la simplicité, de la clarté et de la brièveté qu'aurait une théorie générale des métriques fondée, comme l'est déjà actuellement l'Analyse mathématique elle-même, sur les concepts d'ensemble et d'ordre. On ne manquerait pas d'ailleurs de retrouver, établies cette fois en toute lucidité, toutes les conceptions édifiées au moyen de *conventions* dont le moindre défaut est de se rapporter à des objets non définis et qui d'ailleurs peuvent fort bien, tout en n'étant pas *contradictoires* entre elles, n'être compatibles que moyennant la réalisation d'une condition supplémentaire telle que celle qui est mise en évidence dans cette étude pour les métriques à n dimensions. Enfin une telle méthode est la seule pleinement satisfaisante pour ceux qui pensent (avec G. Cantor, par exemple) qu'en Mathématiques, tout comme en Physique, on découvre et l'on ne crée pas.

SUR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES RATTACHÉES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

I. — DÉFINITION ET FORMATION DES FONCTIONS $N_k(x)$.

1. Étant donnée une équation algébrique de degré n

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

à coefficients réels, désignons par

$$P_k(x) = 0 \tag{2}$$

l'équation de degré n ayant pour racines les $(2^k)^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de (1).

Nous appellerons *fonction* $N_k(x)$ *rattachée à l'équation* (1) la fonction rationnelle

$$N_k(x) = \frac{x P'_k(x)}{P_k(x)}. \tag{3}$$

La formation de $N_k(x)$ se réduit à celle du polynome $P_k(x)$ de

degré n. Or, la règle pratique suivante [1] fournit le moyen de former le polynome

$$(4) \qquad P_k(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

en partant du polynome

$$(5) \qquad P_{k-1}(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n,$$

supposé déjà formé.

Le coefficient d'un terme quelconque de (4) égale le carré du coefficient correspondant de (5), moins le double produit des coefficients de (5) qui le comprennent, plus le double produit des coefficients qui comprennent ceux-ci, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un des termes extrêmes de l'équation (5); enfin, les coefficients de (4) ainsi calculés, on change le signe de tous ceux des puissances impaires de x.

Autrement dit, on aura

$$(6) \qquad C_k = (-1)^{n-k}(B_k^2 - 2B_{k-1}B_{k+1} + 2B_{k-2}B_{k+2} - \ldots).$$

En partant donc de

$$P_0(x) = f(x),$$

on formera de proche en proche, suivant cette règle, la suite de polynomes

$$(7) \qquad P_1(x), \quad P_2(x), \quad P_3(x), \quad \ldots,$$

à l'aide desquels se formerait la suite de fonctions

$$(8) \qquad N_1(x), \quad N_2(x), \quad N_3(x), \quad \ldots,$$

par la formule (3).

On trouve ainsi, par exemple, pour l'équation du sixième degré

$$(9) \qquad x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

---

[1] GRÄFFE, *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen* (Zurich, 1837). — CARVALLO, *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes* (Paris, 1896).

(traitée par Gräffe), la suite

$$(10)\quad \begin{cases} N_0(x) = \dfrac{6x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + x}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1}, \\ N_1(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1}, \\ N_2(x) = \dfrac{6x^6 - 25x^5 + 56x^4 + 91x^3 + 364x^2 + 19x}{x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1}, \\ N_3(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 3480x^4 + 12981x^3 + 63948x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1}. \end{cases}$$

2. Il est possible d'avoir une expression explicite de la fonction $N_k(x)$ sous la forme d'une combinaison du polynome $f(x)$ lui-même et de sa première dérivée.

A cet effet, remarquons que, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation (1), on aura

$$\frac{P'_k(x)}{P_k(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - \alpha_i^{2^k}},$$

ou bien

$$(11)\qquad N_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha_i^{2^k}}{x}}.$$

Considérons, d'autre part, l'expression

$$(12)\qquad \Phi_m(r) = \frac{r}{m}\left[\frac{\omega_1 f'(\omega_1 r)}{f(\omega_1 r)} + \ldots + \frac{\omega_m f'(\omega_m r)}{f(\omega_m r)}\right],$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ désignent les racines primitives de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

m étant un entier positif quelconque. Comme on a

$$\frac{\omega_j r f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_j}{\omega_j - \dfrac{\alpha_i}{r}},$$

on peut écrire

$$(13)\qquad \Phi_m(r) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=n} A_i(r),$$

avec

$$(14)\qquad A_i(r) = \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\omega_j}{\omega_j - \frac{\alpha_i}{r}}.$$

Or, l'identité

$$(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_m) = x^m - 1$$

conduit facilement à la suivante,

$$\frac{\omega_1}{\omega_1 - x} + \frac{\omega_2}{\omega_2 - x} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - x} = \frac{m}{1 - x^m},$$

laquelle fait voir que

$$A_i(r) = \frac{m}{1 - \left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m},$$

ou bien, d'après (13),

$$(15)\qquad \Phi_m(r) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}.$$

La comparaison de (11) et (15) conduit alors aux relations

$$(16)\qquad N_k(x) = \Phi_m(r), \quad \text{pour } r = x^{2^{-k}}, \quad m = 2^k,$$

$$(17)\qquad \Phi_m(x) = N_k(r), \quad \text{pour } r = x^{2^k}, \quad m = 2^k.$$

Nous avons ainsi une expression explicite de $N_k(x)$ *sous la forme de la somme de* 2^k *expressions*

$$(18)\qquad 2^{-k}\omega_j r \frac{f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)},$$

où il faut poser

$$r = x^{2^{-k}} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, 2^k).$$

II. — Relation entre les fonctions $N_k(x)$ et le nombre de racines de l'équation donnée comprises a l'intérieur d'une circonférence donnée.

1. On connaît le rôle que jouent les polynomes $P_k(x)$ dans la méthode de Gräffe pour la résolution numérique des équations. Nous indiquerons ici une relation qui existe entre les fonctions

rationnelles $N_k(x)$, intimement liées aux polynomes $P_k(x)$, et le nombre h de racines de l'équation donnée (1) dont les modules sont inférieurs à un nombre donné.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les racines comprises à l'intérieur de la circonférence C de rayon r, ayant l'origine comme centre; $\alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}, \ldots, \alpha_n$ les racines extérieures à C, en supposant qu'aucune des racines ne se trouve sur C.

Comme on a identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = h + \varepsilon_1, \tag{19}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} \tag{20}$$

et

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m}{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m - 1} = \varepsilon_2, \tag{21}$$

les inégalités

$$\left\{\begin{array}{ll} \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1, & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, h, \\ \left|\frac{r}{\alpha_i}\right| < 1, & \text{pour } i = h+1, \ldots, n, \end{array}\right. \tag{22}$$

combinées avec les relations (11), (15), (17), font voir que

$$h = N(r^{2^k}) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{23}$$

avec

$$|\varepsilon_1| < \sum_{i=1}^{i=h} \frac{\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m}{1-\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m}, \tag{24}$$

$$|\varepsilon_2| < \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1-\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}, \tag{25}$$

où l'on a mis pour abréger $m = 2^k$.

2. Nous en tirerons la conséquence suivante :

Supposons que l'équation donnée $f(x)=0$ n'ait aucune racine à module compris entre deux nombres R et $R+\delta$ ni égal à un de ces nombres. En prenant pour r la valeur

$$r = R + \frac{\delta}{2}, \tag{26}$$

le nombre de racines à modules inférieurs à R sera encore h, de sorte que pour $i = 1, 2, \ldots, h$ on aura

$$|\alpha_i| < R = r - \frac{\delta}{2}, \tag{27}$$

et pour $i = h+1, \ldots, n$

$$|\alpha_i| > R + \delta = r + \frac{\delta}{2}. \tag{28}$$

Considérons d'abord ces dernières racines. L'inégalité (28) montre qu'en désignant par λ la valeur

$$\lambda = \frac{r}{R+\delta} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2R+\delta}} < 1, \tag{29}$$

on aura

$$\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < \lambda^m < 1, \tag{30}$$

d'où

$$\frac{1}{1 - \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|} < \frac{1}{1-\lambda^m}$$

et, par suite,

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1 - \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m} < \frac{1}{1-\lambda^m} \sum_{i=h+1}^{i=n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m;$$

d'où, en vertu de

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < (n-h)\lambda^m,$$

on tire

$$|\varepsilon_2| < \frac{(n-h)\lambda^m}{1-\lambda^m}. \tag{31}$$

D'autre part, pour les racines α_i ($i = 1, 2, \ldots, h$) l'inégalité (27) montre que

$$(32) \qquad \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < \frac{R}{r} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2R}} < \lambda;$$

d'où l'on tire, comme tout à l'heure,

$$(33) \qquad |\varepsilon_1| < \frac{h\lambda^m}{1 - \lambda^m},$$

de sorte qu'en posant

$$(34) \qquad \theta = \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\delta}{2R + \delta} > 1,$$

$$(35) \qquad \xi_m = \frac{n}{\theta^{m-1}},$$

on aura

$$(36) \qquad |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \xi_m.$$

La combinaison de (31), (33), (36) et (23) conduit alors à l'égalité

$$(37) \qquad h = N(r^{2^k}) + \beta_k,$$

où β_k est une quantité dont le module est inférieur à ξ_m.

3. On en conclut d'abord que *pour toute valeur de l'entier positif k on aura*

$$(38) \qquad N_k(r^{2^k}) - \xi_m < h < N_k(r^{2^k}) + \xi_m,$$

et comme, pour $k = \infty$, on a

$$\lim \xi_m = 0,$$

on aura

$$(39) \qquad h = \lim N_k(r^{2^k}).$$

Mais on peut avoir des égalités pareilles même pour les valeurs finies de l'entier k.

Désignons par M_m la partie entière et par γ_m la partie fraction-

naire du nombre $N_k(r^m)$, de sorte que

$$N_k(r^m) = M_m + \gamma_m, \tag{40}$$

avec

$$0 < \gamma_m < 1; \tag{41}$$

d'après (38) on aura, pour toute valeur de k,

$$M_m + (\gamma_m - \xi_m) < h < M_m + (\gamma_m + \xi_m). \tag{42}$$

Donnons maintenant à k la plus petite valeur possible pour qu'on ait

$$0 < \xi_m < 1; \tag{43}$$

d'après (35), cette condition sera satisfaite si l'on fait

$$\frac{n}{\theta^{m-1}} < 1, \tag{44}$$

d'où l'on tire

$$k > \frac{\log\log(n+1) - \log\log\theta}{\log 2}. \tag{45}$$

Distinguons alors les deux cas suivants :

Premier cas — Soit

$$\gamma_m + \xi_m \leqq 1.$$

Dans ce cas on ne peut pas avoir $\gamma_m > \xi_m$, car on aurait alors

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = \theta_2,$$

avec

$$0 \leqq \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

et, par suite,

$$M_m + \theta_2 < h < M_m + 1 - \theta_1,$$

ce qui est impossible, le premier et le troisième membre de cette inégalité ne comprenant aucun nombre entier.

On ne peut donc qu'avoir $\gamma_m \leqq \xi_m$, c'est-à-dire

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

avec

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 \leqq \theta_2 < 1,$$

ce qui montre qu'on aura

$$h = M_m.$$

Deuxième cas. — Soit

$$\gamma_m + \xi_m < 1.$$

Alors : 1° Si $\gamma_m > \xi_m$, on aura

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = 1 - \theta_2,$$

avec

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1,$$

ce qui montre que

$$h = M_m + 1.$$

2° Si $\gamma_m \leqq \xi_m$, on aura

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

avec

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 \leqq 1,$$

ce qui montre que h est égal à M_m ou bien $M_m + 1$.

On arrive ainsi au théorème suivant :

Étant donnée une couronne circulaire C *ayant l'origine comme centre, de rayon intérieur* R *et d'épaisseur* δ, *ne contenant aucune racine de l'équation algébrique donnée de degré* n, *si l'on donne à l'entier* k *une valeur quelconque supérieure à*

$$(46) \qquad \frac{1}{\log 2}\left[\log\log(n+1) - \log\log\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right],$$

le nombre h *de racines entourées par la couronne* C *sera égal à* M *ou bien à* M + 1, M *désignant la partie entière du nombre* $N_k(x)$ *pour*

$$(47) \qquad x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^{2^k}.$$

En particulier, en désignant par γ la partie fractionnaire de $N_k(x)$ pour (47) et par ξ la valeur

$$(48) \qquad \xi = \frac{n}{\left(\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right)^{2^k} - 1}:$$

1° Si $\gamma + \xi \leqq 1$ on aura

$$h = M;$$

2° Si $\gamma + \xi > 1$ et $\gamma \geqq \xi$ on aura

$$h = M + 1.$$

Considérons, comme exemple, l'équation du sixième degré (9) du paragraphe I et cherchons le nombre de racines entourées par la couronne C ayant $R = 0,6$ comme rayon intérieur et $\delta = 0,6$ comme épaisseur, en sachant que C ne contient aucune racine.

L'expression (46) a pour valeur 2,75, de sorte qu'on peut prendre $k = 3$. L'expression $N_3(x)$, calculée à cet endroit, prend pour

$$x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^3 = (0,9)^3 = 0,4305$$

la valeur 2,06 d'où

$$M = 2, \qquad \gamma = 0,06.$$

Et comme, d'après (48), on trouve $\xi = 0,67$, on aura

$$\gamma + \xi = 0,73 < 1,$$

ce qui montre que l'équation a exactement deux racines entourées par la couronne C. Ceci se vérifie directement, car l'équation a trois paires de racines imaginaires conjuguées dont les modules sont (Gräffe, *loc. cit.*, p. 28)

$$\rho_1 = 1,52\,366,$$
$$\rho_2 = 1,25\,505,$$
$$\rho_3 = 0,52\,294,$$

et la dernière paire est la seule qui soit entourée par C.

ÉTUDE SUR LES SURFACES IMAGINAIRES DE MONGE A LIGNES DE COURBURE CONFONDUES;

Par M. L. Raffy.

Dans l'article XIX de son *Application de l'Analyse à la Géométrie,* Monge traite *de la surface dont les deux rayons de*

courbure en chaque point sont égaux entre eux et dirigés du même côté. Il remarque tout d'abord que cette surface est caractérisée par la propriété d'avoir ses deux familles de lignes de courbure confondues, à moins que ses directions principales ne soient partout indéterminées, auquel cas il démontre très élégamment, en négligeant les développables isotropes, que la surface est une sphère. Monge intègre ensuite, par sa belle méthode des caractéristiques, l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend la surface et arrive ainsi à la définir comme enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe gauche arbitraire et dont le rayon est égal à l'arc de cette courbe. Il suit de là que chaque enveloppée est tangente à la sphère infiniment voisine, et Monge conclut, avec raison, que les points réels de la surface sont tous sur une développante de la ligne des centres.

On énonce aujourd'hui ce résultat en disant que deux enveloppées consécutives ont en commun deux génératrices rectilignes, de sorte que les surfaces en question sont des *surfaces réglées à génératrices isotropes*. De fait, la première solution du problème de Monge qui ait été présentée sous forme entièrement explicite est constituée par des surfaces réglées imaginaires, que J.-A. Serret a fait connaître dans sa célèbre *Note sur une équation aux dérivées partielles* (*Journ. de Liouville*, t. XIII, 1848, p. 361). Les surfaces de Serret sont caractérisées par la double propriété d'être réglées et d'avoir leur courbure totale constante; on sait (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 315) qu'elles résultent de la déformation de la sphère considérée comme surface réglée.

Dans une Note publiée en 1856, Ossian Bonnet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLII, p. 1067) a établi incidemment une équation d'où il résulte que les lignes de courbure des surfaces considérées par Monge sont en même temps des lignes asymptotiques, et il a prouvé qu'elles sont toutes tracées sur des plans, isotropes à la vérité, mais il n'a point vu que ces lignes étaient des droites isotropes.

C'est S. Lie, semble-t-il d'après une indication de M. Stäckel (*Leipziger Berichte*, t. XLVIII, 1896, p. 478), qui a reconnu l'identité des surfaces imaginaires de Monge avec les surfaces *gauches* à génératrices isotropes.

M. G. Scheffers a retrouvé ces mêmes surfaces (*Einführung*

in die Theorie der Flächen, 1902, p. 227) en cherchant celles dont une famille d'asymptotiques est composée de courbes minima, et il a exprimé leurs coordonnées par des formules d'où il est aisé de faire disparaître les signes de quadrature dans le cas général, mais non dans le cas des surfaces de Serret.

M. Stäckel a fait remarquer (*Leipziger Berichte,* t. LIV, 1902, p. 108) que l'enveloppe des sphères définies par Monge se compose de deux nappes, dont chacune est engendrée par l'une des deux génératrices isotropes qui sont communes à deux enveloppées consécutives; mais, ayant admis (p. 112) que ces deux nappes sont symétriques par rapport à un plan, il n'en a point approfondi l'étude. M. Stäckel a donné une nouvelle représentation paramétrique explicite des surfaces de Serret.

En revenant, à mon tour, sur les surfaces remarquables qui ont fait l'objet des travaux précités, je voudrais pouvoir les appeler *surfaces de Monge.* Mais cette désignation est depuis longtemps attachée aux surfaces dont les normales touchent une développable. Aussi donnerai-je à celles qui vont nous occuper le nom de *surfaces à lignes de courbure confondues,* pour exclure les développables isotropes, dont les lignes de courbure sont indéterminées. Je les représenterai par le symbole (O_k), destiné à rappeler que tous leurs points sont des ombilics et qu'elles ont une courbure totale K, tandis que cette notion échappe quand il s'agit de développables isotropes. Il m'a semblé qu'il y avait lieu d'étudier ces surfaces parce qu'elles sont curieuses en elles-mêmes et que, malgré leur généralité, il est possible d'en donner diverses représentations entièrement explicites ou n'exigeant que des quadratures; parce qu'elles donnent lieu à des questions d'applicabilité assez délicates; enfin, parce qu'il a été émis à leur sujet quelques assertions erronées.

J'établis d'abord (§ I), par un raisonnement purement géométrique, l'identité des surfaces (O_k) avec les surfaces gauches à génératrices isotropes.

Je définis ensuite (§ II) la transformation de contact qui permet de les déduire des surfaces à plan directeur et qui en fournit une représention analytique commode, à l'aide des coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet; cette représentation convient

aussi bien aux surfaces de Serret qu'aux surfaces à courbure totale variable.

En cherchant le lieu des centres de courbure principaux des surfaces (O_k), on trouve des formules propres à représenter une courbe quelconque (§ III). Le calcul de la courbure conduit à une conclusion qui n'avait peut-être pas été remarquée; *pour que la courbure d'une courbe soit constamment nulle, il faut et il suffit que cette courbe soit tracée sur un plan isotrope.*

Je détermine ensuite (§ IV) les deux nappes de l'enveloppe des sphères définies par Monge et je cherche la condition pour qu'on puisse les appliquer l'une sur l'autre, en faisant correspondre les deux génératrices qui appartiennent à une même sphère enveloppée. Bien qu'elle s'exprime par une relation différentielle d'ordre élevé, cette condition est susceptible d'un énoncé géométrique précis : *le lieu des centres des sphères enveloppées est une courbe telle que le rapport de sa courbure à sa torsion varie proportionnellement à son arc.*

Les surfaces (O_k) ne sont qu'une variété d'une classe de surfaces plus générales, dont la courbure totale dépend seulement de l'un des paramètres des lignes de longueur nulle. Ces surfaces mettant en défaut, comme les surfaces à courbure totale constante, la théorie classique de l'applicabilité fondée sur l'emploi des paramètres différentiels, j'indique (§ V) le moyen de décider si deux d'entre elles sont applicables l'une sur l'autre. J'établis ensuite une proposition relative au problème général de la détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales : *connaissant l'élément linéaire d'une sphère et l'une de ses familles de génératrices rectilignes, on n'a qu'une seule équation de Riccati à intégrer pour obtenir l'autre famille.*

Enfin, je rapporte (§ VI) les surfaces (O_k) à leurs lignes minima et à leurs asymptotiques. La solution du premier de ces problèmes repose sur cette propriété que l'*élément linéaire de toute surface* (O_k) *devient celui d'une sphère de rayon* 1 *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne;* elle résulte de mes travaux antérieurs sur les surfaces isothermiques. La solution du second problème est fondée sur des formules dues à M. Goursat et conduit aux surfaces à réseau conjugué persistant obtenues par M. Drach.

I. — Identité des surfaces a courbures égales avec les surfaces gauches a génératrices isotropes.

1. Une surface étant rapportée à des coordonnées rectilignes (x, y, z), la condition nécessaire et suffisante pour que ses deux courbures principales aient même valeur algébrique en tous ses points est

$$(\mathrm{M})\quad 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=0.$$

Or, les lignes de courbure ont pour équation différentielle

$$[(1+q^2)s-pqt]\,dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\,dx\,dy \\ -[(1+p^2)s-pqr]\,dx^2=0,$$

et la relation précédente exprime précisément que le premier membre de cette équation est un carré parfait. Pour le réduire à une identité, il faudrait supposer

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2},$$

ce qui conduit, comme on sait, aux développables isotropes et à la sphère, seules surfaces dont les lignes de courbure soient indéterminées. En conséquence, l'équation (M) de Monge caractérise les surfaces *à lignes de courbures confondues en une seule famille,* mais non indéterminées. Prenant cette propriété pour nouvelle définition des surfaces (O_k) qui nous occupent, nous allons prouver géométriquement leur identité avec les surfaces gauches à génératrices isotropes, identité que M. Stäckel a établie par le calcul (*Leipziger Berichte,* 1896).

Les lignes de courbure, les lignes de longueur nulle ou lignes minima et les lignes asymptotiques d'une surface forment trois réseaux qui se divisent harmoniquement deux à deux. Or, on sait que, *si deux rayons d'un faisceau harmonique viennent à se confondre, un troisième rayon coïncide nécessairement avec les rayons confondus.* En conséquence, quand les lignes de courbure sont confondues, l'une des familles de lignes minima et l'une des familles d'asymptotiques coïncident avec la famille unique de

lignes de courbure. Mais les normales menées à une surface le long d'une ligne de courbure forment une développable; si cette ligne de courbure est en même temps une ligne asymptotique, les normales de la surface sont des binormales; elles ne peuvent former une développable que si la ligne est plane; enfin, une ligne plane de longueur nulle est une droite isotrope. Donc *les surfaces* (O_k) *sont des surfaces à génératrices isotropes,* d'ailleurs non développables, puisque leurs lignes de courbure ne sont pas indéterminées.

Pour établir la réciproque, rappelons que, *quand deux rayons forment faisceau harmonique avec deux couples de rayons, si ces deux derniers couples ont un rayon commun et un seul, les deux premiers rayons sont confondus et coïncident avec le rayon commun.* Il suit de là que, quand *une* famille d'asymptotiques et *une* famille de lignes minima coïncident, les deux familles de lignes de courbure sont confondues et confondues avec ces deux familles coïncidantes. Mais sur toute surface gauche à génératrices isotropes, autre qu'une sphère, une famille de lignes de longueur nulle et une seule, celle des génératrices rectilignes, est en même temps une famille d'asymptotiques. Donc *toute surface gauche à génératrices isotropes, autre qu'une sphère, est une surface* (O_k).

Ajoutons qu'*à la famille des courbes qui sont à la fois asymptotiques et lignes de courbure correspond, dans la représentation sphérique des surfaces* (O_k) *une famille de lignes minima:* soient, en effet, (CA) une courbe de la famille et (Γ) sa représentation sphérique; la tangente en un point de (Γ) est parallèle à la tangente au point correspondant de (CA), puisque (CA) est ligne de courbure; elle lui est aussi perpendiculaire, puisque (CA) est une asymptotique; il suit de là que sa direction est une direction isotrope du plan tangent à la sphère.

II. — Représentation analytique des surfaces (O_k).

2. La théorie des transformations de contact suggère un mode de représentation des surfaces (O_k), qui n'exige aucune intégration et qui convient à toutes ces surfaces, en particulier à celles de

Serret. Pour l'exposer, convenons d'appeler *transformation de Bonnet* la correspondance qui existe entre une surface dont les coordonnées rectilignes sont α, β, ξ et celles dont α, β, ξ sont les coordonnées dans le système tangentiel d'Ossian Bonnet, où les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ représentent les génératrices de la sphère dont chaque rayon est l'axe du plan mobile dans l'une de ses positions (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 246).

Il est évident que les surfaces (O_k), ayant leurs lignes de courbure confondues, dérivent, par la transformation de S. Lie, des développables, qui ont leurs asymptotiques confondues. Or, cette transformation équivaut à une transformation d'Ampère, suivie d'une transformation de Bonnet. Pour passer des développables aux surfaces (O_k), il faut donc effectuer d'abord une transformation d'Ampère, ce qui conduit, comme on sait, aux surfaces à plan directeur, puis une transformation de Bonnet. En conséquence, cette dernière transformation change les surfaces à plan directeur en surfaces (O_k). Si donc on rapporte les surfaces (O_k) aux coordonnées tangentielles isotropes de Bonnet, on sera ramené à l'équation finie

$$\xi = A(\alpha)\beta + A_0(\alpha),$$

où A et A_0 sont deux fonctions arbitraires de α et l'on n'aura plus à opérer que des différentiations.

3. Pour retrouver et compléter ces conclusions, considérons avec O. Bonnet le plan représenté par l'équation

$$(\alpha+\beta)x + i(\beta-\alpha)y + (\alpha\beta-1)z + \xi = 0.$$

Si l'on pose

$$p = \xi'_\alpha, \qquad q = \xi'_\beta, \qquad r = \xi''_{\alpha^2}, \qquad s = \xi''_{\alpha\beta}, \qquad t = \xi''_{\beta^2},$$

la surface enveloppe de ce plan est déterminée par les formules

$$(1) \quad (\alpha\beta+1)z = \xi - p\alpha - q\beta, \quad x - iy = -\beta z - p, \quad x + iy = -\alpha z - q.$$

Ses rayons de courbure principaux et les centres de courbure correspondants sont fournis par les relations

$$(2) \begin{cases} 2\rho = (\alpha\beta+1)(z + s \pm \sqrt{rt}), & X - iY = -p + \beta(s \pm \sqrt{rt}), \\ 2Z = (\alpha\beta+1)z + (\alpha\beta-1)(s \pm \sqrt{rt}), & X + iY = -q + \alpha(s \pm \sqrt{rt}). \end{cases}$$

Pour que les deux centres de courbure principaux coïncident, il faut et il suffit que le produit rt soit nul. Mais les deux solutions $r = 0$ et $t = 0$ ne sont pas distinctes, les deux variables indépendantes α et β jouant le même rôle. Nous obtiendrons donc toutes les surfaces (O_k) et celles-là seulement en prenant, par exemple, $t = 0$, ce qui donne bien

$$\xi = A(\alpha)\beta + A_0(\alpha). \tag{3}$$

En substituant cette expression de ξ dans les relations (1), on trouve leurs coordonnées sous forme entièrement explicite:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} z &= \frac{A_0 - \alpha A_0' - A'\alpha\beta}{\alpha\beta + 1},\\ x - iy &= -\frac{(A_0 + A')\beta + A_0'}{\alpha\beta + 1},\\ x + iy &= -\frac{\alpha(A_0 - \alpha A_0') - A'\alpha^2\beta}{\alpha\beta + 1} - A;\end{aligned}\right.$$

les lettres accentuées indiquent ici des dérivées et nous leur donnerons toujours cette signification.

Si l'on pose pour un instant

$$\gamma = \frac{A' + A_0 - \alpha A_0'}{\alpha\beta + 1},$$

on reconnaît que les équations (I) deviennent

$$z + A' = \gamma, \qquad \alpha(x - iy) + A_0 + A' = \gamma, \qquad x + iy + A - \alpha A' = -\alpha\gamma,$$

et l'on met ainsi en évidence les génératrices isotropes $\alpha = \text{const.}$

L'expression générale de l'élément linéaire de la surface qu'enveloppe le plan (1) étant

$$ds^2 = [(z + s)\,d\alpha + t\,d\beta)]\,[r\,d\alpha + (z + s)\,d\beta],$$

il suffit d'avoir égard à l'équation (3) pour trouver

$$ds^2 = \frac{A' + A_0 - \alpha A_0'}{\alpha\beta + 1}\left[(A''\beta + A_0'')\,d\alpha + \frac{A_0' + A_0 - \alpha A_0'}{\alpha\beta + 1}\,d\beta\right]d\alpha.$$

Tel est l'élément linéaire des surfaces (O_k). L'une des familles de lignes minima est formée des courbes $\alpha = \text{const.}$ qui correspondent à une famille de lignes minima de la représentation sphérique; nous avons déjà (n° 1) expliqué ce fait. La détermination de la

seconde famille de lignes minima dépend d'une équation de Riccati.

On arrive à des conclusions toutes semblables relativement aux lignes asymptotiques. En effet, leur équation différentielle

$$r\,d\alpha^2 + 2(z+s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2 = 0$$

se réduit ici à

$$d\alpha\left[(A''\beta + A''_0)\,d\alpha + 2\,\frac{A' + A_0 - \alpha A'_0}{\alpha\beta + 1}\,d\beta\right] = 0;$$

une famille d'asymptotiques est formée des génératrices isotropes $\alpha =$ const. L'autre famille dépend d'une équation de Riccati.

4. Introduisons maintenant l'hypothèse (3) dans les formules (2). Le rayon de courbure principal ρ et le centre (X, Y, Z) de l'unique sphère principale (Σ) qui correspondent à chaque point (α, β) d'une surface (O_k) sont déterminés comme suit :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 2\rho = A_0 - \alpha A'_0 + A', & X - iY = -A'_0, \\ 2Z = A_0 - \alpha A'_0 - A', & X + iY = \alpha A' - A. \end{cases}$$

Par suite, la courbure totale $K = \rho^{-2}$ ne dépend que de α, le centre de courbure principal est le même pour tous les points d'une génératrice isotrope $\alpha =$ const., et la surface des centres se réduit à une courbe (Γ) dont on connaît les coordonnées (X, Y, Z); on a immédiatement son arc S, dont la différentielle est

$$\pm\,dS = \frac{A'' - \alpha A''_0}{2} = d\rho;$$

on peut, en conséquence, prendre $\rho = S$ et l'on retrouve la génération indiquée par Monge : *toute surface à lignes de courbure confondues est l'enveloppe d'une sphère* (Σ) *dont le rayon* ρ *est égal à l'arc* S *de la courbe* (Γ) *décrite par le centre de cette sphère.*

Les surfaces de Serret sont caractérisées, parmi les surfaces à génératrices isotropes, par la propriété d'avoir leur courbure totale constante. Mais l'hypothèse $d\rho = 0$ entraîne $dS = 0$; donc *les surfaces de Serret sont celles des surfaces* (O_k) *pour lesquelles le lieu* (Γ) *des centres des sphères principales est une courbe minima.* Elles sont représentées par les formules (I), pourvu

qu'on y introduise l'hypothèse

$$2\rho = A_0 - \alpha A'_0 + A' = \text{const.}$$

Il n'y a qu'à poser

$$A_0(\alpha) = A'_1(\alpha),$$

ce qui donne

$$A(\alpha) = \alpha A'_1 - 2A_1 + 2\rho\alpha,$$

et les formules (I) deviennent

$$(S)\qquad \begin{cases} z = A'_1 - \alpha A''_1 - \dfrac{2\rho\alpha\beta}{\alpha\beta+1}, \\ x - iy = -A''_1 - \dfrac{2\rho\beta}{\alpha\beta+1}, \\ x + iy = \alpha^2 A''_1 - 2\alpha A'_1 + 2A_1 - \dfrac{2\rho\alpha}{\alpha\beta+1}. \end{cases}$$

Telles sont les expressions entièrement explicites des cordonnées des surfaces de Serret [1].

III. — Un mode de représentation des courbes gauches. Courbure. Torsion.

5. Nous venons de rencontrer un système simple de formules, le système (II), qui peut représenter les coordonnées X, Y, Z d'une courbe gauche quelconque (Γ), et nous avons remarqué que, dans ce système, ρ n'est autre que l'arc de la courbe (Γ).

Ainsi, les équations qui le composent

$$(\Gamma)\qquad \begin{cases} X + iY = \alpha A' - A, & 2Z = A_0 - \alpha A'_0 - A', \\ X - iY = -A'_0, & 2S = A_0 - \alpha A'_0 + A', \end{cases}$$

fournissent une solution rationnelle de l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dS^2,$$

la plus simple, semble-t-il, de toutes celles que l'on connaît [2].

---

[1] Ces dernières formules s'accordent, au changement près de β en $-\beta^{-1}$, de A_1 en $-f(\alpha)$ et de ρ^2 en K^{-1} avec les formules (10″) de M. Stäckel (*Leipziger Berichte*, t. LIV, 1902; p. 116). Mais les lignes β = const. ne sont pas des lignes de longueur nulle, comme ce géomètre l'indique par suite d'un calcul inexact de l'élément linéaire. (*Voir* ci-après, la fin de notre n° 10.)

[2] Si l'on introduit l'hypothèse S = 0 dans les formules (Γ), on retrouve les expressions classiques des coordonnées des courbes minima.

Elle diffère à peine de celle que M. Vessiot a donnée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXL, 1905, p. 1381) et que voici :

$$X + iY = \alpha P' - P, \qquad 2Z = \alpha^2 Q' - P',$$
$$X - iY = \alpha Q' + Q, \qquad 2S = \alpha^2 Q' + P'.$$

Pour les ramener l'une à l'autre, il suffit, en effet, de poser

$$A(\alpha) = P(\alpha), \qquad A_0(\alpha) = -\alpha Q(\alpha).$$

Ayant à introduire ultérieurement le rapport

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0} = -\frac{P''}{\alpha Q'' + 2Q'},$$

dont l'expression est moins simple dans la notation de M. Vessiot, nous conserverons les formules (Γ), auxquelles nous avons été tout naturellement conduits.

Désignant toujours les dérivées par des lettres accentuées, on déduit des formules (Γ) les relations suivantes :

$$S' = \frac{A'' - \alpha A''_0}{2},$$

$$Y'Z'' - Z'Y'' = \frac{i}{4}[(\alpha^2 - 1)(A''A''_0 - A''_0 A''') - A''^2 + A''^2_0],$$

$$Z'X'' - X'Z'' = \frac{1}{4}[(\alpha^2 + 1)(A''A''_0 - A''_0 A''') - A''^2 - A''^2_0],$$

$$X'Y'' - Y'X'' = \frac{i}{4}[\quad -2\alpha(A''A''_0 - A''_0 A''') + 2A''A''_0],$$

d'où résulte immédiatement

$$\sum (Y'Z'' - Z'Y'')^2 = (A''_0 A''' - A''A'''_0) S'^2.$$

La courbure de la courbe (Γ) a donc pour expression

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\Sigma(Y'Z'' - Z'Y'')^2}}{S'^2} = 4\frac{\sqrt{A''_0 A''' - A''A'''_0}}{(A'' - \alpha A''_0)^2}.$$

6. On déduit de là que *toute courbe dont le rayon de courbure est constamment infini appartient à un plan isotrope.* En effet, l'équation

$$A''_0 A''' - A''A'''_0 = 0$$

a pour intégrale générale

$$A_0 = lA + m\alpha + n,$$

l, m, n désignant trois constantes. En raison de cette liaison entre A_0 et A, les formules (Γ) deviennent

$$X + iY = \alpha A' - A, \quad X - iY = -lA' - m, \quad 2Z = l(A - \alpha A') - A' + n.$$

Elles entraînent visiblement l'équation

$$(l^2 - 1)X + i(l^2 + 1)Y + 2lZ = ln + m,$$

qui est celle d'un plan isotrope. On pourrait d'ailleurs établir cette proposition et sa réciproque sans faire usage du mode de représentation que nous employons ici.

Nous déduirons encore des formules (Γ) l'expression de la torsion, qui est la suivante :

$$\frac{1}{T} = i\,\frac{(A_0''A^{IV} - A''A_0^{IV})(A'' - \alpha A_0'') - 2(A_0''A''' - A''A_0''')(A_0'' - \alpha A_0''' + A''')}{(A_0''A''' - A''A_0''')(A'' - \alpha A_0'')^2}.$$

En vue de ce qui suivra, nous allons transformer ce résultat en introduisant les fonctions

$$\lambda = \frac{A''}{A_0''}, \qquad \mu = \frac{\lambda''}{\lambda'}.$$

Si l'on exprime A'', A''' et A^{IV} au moyen de λ, λ', μ et des dérivées de A_0, on trouve après réductions

$$\frac{1}{T} = i\,\frac{\mu(\lambda - \alpha) - 2(\lambda' + 1)}{A_0''(\lambda - \alpha)^2}.$$

En conséquence, pour que la courbe représentée par les formules (Γ) soit plane, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda''(\lambda - \alpha) - 2\lambda'(\lambda' + 1) = 0.$$

C'est là une équation du second ordre pour la fonction λ; son intégrale générale est une relation involutive

$$l\lambda\alpha + m(\lambda + \alpha) + n = 0$$

à coefficients constants entre α et λ, c'est-à-dire $A'' : A_0''$. On l'obtient en écrivant qu'il existe entre les différentielles dX, dY

et dZ tirées des relations (Γ) une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Si λ est indépendant de α, ce qui arrive quand $ln - m^2$ est nul, le rayon de courbure R est infini et la courbe est tracée sur un plan isotrope; car, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{1}{R^2} = \frac{16\lambda'}{A_0''^2(\lambda - \alpha)^4}.$$

Rapprochant cette expression de celle de T, nous obtenons

$$\frac{R^2}{T^2} = -\frac{[\mu(\lambda - \alpha) - 2(\lambda' + 1)]^2}{16\lambda'},$$

relation qui nous servira un peu plus loin.

IV. — Les deux nappes d'un périsphère réglé. Cas d'applicabilité.

7. D'après la génération indiquée par Monge et rappelée au n° 4, *toute surface à lignes de courbure confondues est l'enveloppe d'une sphère* (Σ) *dont le rayon* ρ *est égal à l'arc* S *de la courbe* (Γ) *décrite par le centre de cette sphère*. Ainsi, les surfaces (O_k) sont des *périsphères;* mais, comme la caractéristique de la sphère enveloppée, au lieu d'être un cercle proprement dit, dégénère en deux droites isotropes, le périsphère est *réglé* et se compose de deux nappes. C'est l'étude de ces deux nappes qui va nous occuper.

Considérons la sphère (Σ) représentée par l'équation

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = \rho^2,$$

qu'on peut écrire

$$[x + iy - (X + iY)][x - iy - (X - iY)] + (z - Z)^2 = \rho^2,$$

et où X, Y, Z, ρ ont les expressions fournies par les formules (II) :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} X + iY = \alpha A' - A, & 2Z = A_0 - \alpha A_0' - A', \\ X - iY = -A_0', & 2\rho = A_0 - \alpha A_0' + A'. \end{cases}$$

Le plan radical (P) de la sphère (Σ) et de la sphère infiniment voisine est, comme nous le savons, tangent à la sphère (Σ); eu

égard aux relations (II), son équation est

$$(P)\left\{\begin{aligned} &A''_0[x+iy-(X+iY)]-\alpha A''[x-iy-(X-iY)] \\ &\qquad\qquad +(z-Z)(\alpha A''_0+A'')=\rho(A''-\alpha A''_0). \end{aligned}\right.$$

Pour trouver les deux génératrices contenues dans ce plan, nous poserons

$$x+iy-(X+iY)=-\frac{2\rho uv}{u-v},\qquad x-iy-(X-iY)=\frac{2\rho}{u-v},$$

$$z-Z=\rho\frac{u+v}{u-v},$$

ce qui vérifie identiquement l'équation de la sphère (Σ). Substituons dans l'équation (P); il vient

$$(v-\alpha)(A''_0u-A'')=0.$$

Il y a donc deux solutions analytiquement distinctes.

Première solution. — Le paramètre u reste arbitraire et $v=\alpha$. On obtient ainsi une première génératrice

$$(G_1)\left\{\begin{aligned} &x_1+iy_1=X+iY-\frac{2\rho\alpha u}{u-\alpha},\qquad x_1-iy_1=X-iY+\frac{2\rho}{u-\alpha}, \\ &\qquad z_1=Z+\rho\frac{u+\alpha}{u-\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Quand u varie ainsi que α, ces formules représentent une surface (E_1), qui est une première nappe du périsphère réglé.

Seconde solution. — Le paramètre v reste arbitraire et l'on a

$$u=\frac{A''}{A''_0}=\lambda.$$

On obtient ainsi une seconde génératrice

$$(G_2)\left\{\begin{aligned} &x_2+iy_2=X+iY-\frac{2\rho\lambda v}{\lambda-v},\qquad x_2-iy_2=X-iY+\frac{2\rho}{\lambda-v}, \\ &\qquad z_2=Z+\rho\frac{\lambda+v}{\lambda+v}, \end{aligned}\right.$$

dont le lieu est la seconde nappe (E_2) de l'enveloppe cherchée.

8. *Remarque.* — Ce qui précède implique l'hypothèse $A''_0\neq 0$.

Supposons A''_0 dans un rapport constant l avec A'', de sorte qu'il suffira de faire $l = 0$ pour annuler A''_0. Nous aurons alors comme ci-dessus (n° 6)

$$A_0 = lA + m\alpha + n,$$

et en vertu des formules (II), qui donnent ici

$$(\text{II } bis) \quad \begin{cases} X + iY = \alpha A' - A, & 2Z = l(A - \alpha A') - A' + n, \\ X - iY = -lA' - m, & 2\rho = l(A - \alpha A') + A' + n, \end{cases}$$

l'équation du plan radical (P) deviendra

$$\begin{aligned} &lA''(x + iy + A - \alpha A') - \alpha A''(x - iy + lA' + m) \\ &\quad + A''(l\alpha + 1)\left[z - \frac{l(A - \alpha A') - A' + n}{2}\right] \\ &\quad + A''(l\alpha - 1)\frac{l(A - \alpha A') + A' + n}{2} = 0. \end{aligned}$$

Si A'' est nul, et par suite aussi A''_0, cette équation se réduit à une identité, comme l'équation en u. En effet, dans le cas présent, les relations (II *bis*) donnent pour X, Y, Z et ρ des valeurs constantes; c'est-à-dire que la sphère (Σ) est fixe.

Supposons désormais $A'' \neq 0$. Le centre (X, Y, Z) de la sphère enveloppée (Σ) n'est plus fixe; mais son lieu (Γ) est, ainsi qu'on l'a déjà vu, une courbe tracée sur le plan isotrope

$$(l^2 - 1)x + i(l^2 + 1)y + 2lz = ln + m.$$

Quant au plan radical (P), son équation, après suppression du facteur commun A' et simplification, se réduit à

$$l(x + iy) + z - n - \alpha(x - iy - lz + m) = 0.$$

Elle montre que ce plan passe par la droite isotrope

$$l(x + iy) + z - n = 0, \qquad x - iy - lz + m = 0,$$

qui est une droite fixe du plan de la courbe (Γ). La nappe (E_2) se réduit alors à cette droite. Ainsi, *quand le rapport*

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0}$$

est constant sans être indéterminé, le lieu (Γ) *des centres des*

sphères enveloppées appartient à un plan isotrope et l'une des nappes de l'enveloppe se réduit à une droite isotrope fixe. Mais nous avons vu plus haut (n° 6) que, si la courbe (Γ) appartient à un plan isotrope, le rapport λ est constant. En conséquence, *quand les sphères enveloppées ont leurs centres sur un plan isotrope, l'une des nappes de l'enveloppe se réduit à une droite isotrope fixe.*

9. Faisons une hypothèse plus générale, savoir que les sphères enveloppées aient leurs centres dans un plan (Π). Le plan radical (P), dans chacune de ses positions, coupe le plan (Π) suivant une droite. Si cette droite n'est pas isotrope, elle ne se confond avec aucune des deux droites isotropes (G_1) et (G_2) du plan (P) qui engendrent les deux nappes du périsphère. Elle est donc bissectrice de ces deux droites et, comme le plan (Π) qui la contient est perpendiculaire à (P), ce plan est un plan de symétrie pour les deux droites (G_1) et (G_2); en conséquence, les deux nappes (E_1) et (E_2) sont symétriques par rapport au plan (Π), c'est-à-dire au plan qui contient les centres des sphères enveloppées.

Supposons maintenant que le plan radical (P) et le plan (Π) se coupent suivant une droite isotrope. Le point commun aux deux droites (G_1) et (G_2) décrit une développante de la courbe (Γ); cette développante, qui est plane comme (Γ) et qui a pour tangente l'intersection des deux plans (P) et (Π), c'est-à-dire une droite isotrope, est elle-même une droite isotrope. Or, il est aisé de voir qu'*une droite isotrope ne peut être la développante d'une courbe* (Γ), *autre qu'elle-même, que si cette courbe* (Γ) *appartient à un plan isotrope.*

Ce dernier cas ayant été traité plus haut, il nous reste à supposer que les sphères enveloppées ont leurs centres sur une droite isotrope (Γ). A la vérité, ce cas échappe à notre analyse, parce que les formules (Γ) ne peuvent pas représenter une droite; si l'on cherche, en effet, à rendre constants les rapports des dérivées des coordonnées X, Y, Z, on trouve $A'' = A''_0 = 0$, et les coordonnées X, Y, Z se réduisent elles-mêmes à des constantes. Mais la solution est évidente : quand les sphères enveloppées ont leurs centres sur une droite non isotrope, leurs rayons étant égaux à la longueur de cette droite comptée à partir d'une origine fixe O,

toutes ces sphères passent par le point O et ont en commun les droites isotropes issues du point O qui appartiennent au plan mené par ce point perpendiculairement à la droite des centres. Si la droite des centres est une droite isotrope, sa longueur est nulle; les sphères dont elle porte les centres sont des sphères de rayon nul, qui la contiennent et se raccordent les unes aux autres en chacun de ses points. L'enveloppe cherchée se réduit alors à cette droite elle-même.

10. *Calcul des éléments linéaires des deux nappes.* — Nous commencerons par représenter *indifféremment* les deux nappes au moyen des formules

$$x = X + a\rho, \qquad y = Y + b\rho, \qquad z = Z + c\rho,$$

en posant

$$(\sigma) \qquad a = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad b = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad c = \frac{u + v}{u - v},$$

On trouve immédiatement

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \rho^2\, d\sigma^2 + d\rho\, \Sigma\, 2a\, dX + \rho\, \Sigma\, 2\, dX\, da,$$

en désignant par

$$d\sigma^2 = \frac{4\, du\, dv}{(u - v)^2}$$

l'élément linéaire de la sphère de rayon 1 que représentent les équations (σ).

Rappelons que la différentielle de ρ est égale à celle de l'arc de la courbe (X, Y, Z); il vient alors

$$ds^2 = 4\frac{\rho^2\, du\, dv}{(u - v)^2} + 2\, d\rho^2 + d\rho\, \Sigma\, 2a\, dX + \rho\, \Sigma\, 2\, dX\, da.$$

D'après les expressions de X, Y, Z et de a, b, c, on a

$$\begin{aligned}
2\, dX &= \quad (\alpha A' - A'_0)\, dx, & (u - v)^2\, da &= \quad (1 - u^2)\, dv - (1 - v^2)\, du,\\
2\, dY &= -\, i(\alpha A' + A'_0)\, dx, & (u - v)^2\, db &= i[(1 + u^2)\, dv - (1 + v^2)\, du],\\
2\, dZ &= -\, (A' + \alpha A'_0)\, dx, & (u - v)^2\, dc &= 2(u\, dv - v\, du).
\end{aligned}$$

Calculant à l'aide des équations (σ) et de ces relations les deux

derniers termes de ds^2, on trouve

$$\Sigma 2a\,dX = \frac{A''(2\alpha - u - v) + A''_0[2uv - \alpha(u+v)]}{u-v}\,d\alpha,$$

$$\Sigma 2\,dX\,da = 2\,\frac{(A''_0 u - A'')(u-\alpha)\,dv - (A''_0 v - A'')(v-\alpha)\,du}{(u-v)^2}\,d\alpha,$$

de sorte qu'il vient

$$ds^2 = \frac{4\rho^2\,du\,dv}{(u-v)^2} + 2\,d\rho^2 + \frac{A''(2\alpha - u - v) + A''_0[2uv - \alpha(u+v)]}{u-v}\,d\rho\,d\alpha$$
$$+ 2\rho\,\frac{(A''_0 u - A'')(u-\alpha)\,dv - (A''_0 v - A'')(v-\alpha)\,du}{(u-v)^2}\,d\alpha;$$

en introduisant la fonction auxiliaire

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0},$$

nous trouvons finalement

$$ds^2 = \frac{4\rho^2\,du\,dv}{(u-v)^2} + 2\,d\rho^2 + A''_0\,\frac{\lambda(2\alpha - u - v) + 2uv - \alpha(u+v)}{u-v}\,d\rho\,d\alpha$$
$$+ 2\rho A''_0\,\frac{(u-\lambda)(u-\alpha)\,dv - (v-\lambda)(v-\alpha)\,du}{(u-v)^2}\,d\alpha.$$

Distinguons maintenant les deux nappes. Faisons d'abord $v = \alpha$, afin d'obtenir l'élément linéaire de (E_1). A cause de l'identité

$$(\alpha A''_0 - A'')\,d\alpha = A''_0(\alpha - \lambda)\,d\alpha = -2\,d\rho,$$

le troisième terme de ds^2 détruit le second et il reste

$$ds_1^2 = \frac{4\rho^2\,d\alpha\,du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A''_0\,\frac{u-\lambda}{u-\alpha}\,d\alpha^2.$$

Pour avoir l'élément linéaire de la nappe (E_2), il faut faire $u = \lambda$; le troisième terme de ds^2 détruit encore le second, et il vient

$$ds_2^2 = \frac{4\rho^2\,d\lambda\,dv}{(v-\lambda)^2} - 2\rho A''_0\,\frac{v-\alpha}{v-\lambda}\,d\lambda\,d\alpha.$$

On voit que, si $\lambda = \text{const.}$, ce dernier élément linéaire se réduit à zéro; nous avons reconnu, en effet, que, dans ce cas, la nappe (E_2) se réduit à une droite isotrope (n° 9).

Les surfaces de Serret correspondent, comme on sait, à l'hypothèse $2\rho = \text{const.}$, qui entraîne $\lambda = \alpha$. Comme nous avons posé

dans ce cas $A_0(\alpha) = A'_1(\alpha)$, nous obtenons pour les éléments linéaires des deux nappes

$$ds_1'^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A_1'''\, d\alpha^2,$$

$$ds_2'^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(v-\alpha)^2} - 2\rho A_1'''\, d\alpha^2.$$

Ces deux nappes, ayant même courbure totale constante ρ^{-2}, sont applicables l'une sur l'autre. On peut les considérer comme formant, à elles deux, une *surface-canal,* puisqu'elles constituent l'enveloppe d'une sphère de rayon constant ρ.

11. *Applicabilité des deux nappes.* — D'après ce qui a été expliqué plus haut (n° 9), les deux nappes (E_1) et (E_2) sont symétriques et par suite applicables l'une sur l'autre, quand le lieu (Γ) des centres des sphères enveloppées appartient à un plan non isotrope. Pour vérifier ce fait sur les expressions de ds_1^2 et de ds_2^2, rappelons la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit plane : nous avons trouvé (n° 6) que λ et α doivent être liés par une relation involutive à coefficients constants

$$l\lambda\alpha + m(\lambda+\alpha) + n = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = -\frac{m\alpha+n}{l\alpha+m}.$$

Si $l^2 - mn$ est différent de zéro, c'est-à-dire si le plan de (Γ) n'est pas un plan isotrope, λ n'est pas indépendant de α. Nous pourrons donc effectuer sur l'élément linéaire ds_2^2 la double substitution

$$\lambda = -\frac{m\alpha+n}{l\alpha+m}, \qquad v = -\frac{mu+n}{lu+m}.$$

Les coefficients de ρ^2 dans ds_1^2 et dans ds_2^2 étant les éléments linéaires d'une sphère de rayon 1, il est bien connu que cette double substitution rend le second identique au premier; il reste donc à vérifier qu'on a

$$\frac{u-\lambda}{u-\alpha}\, d\alpha + \frac{v-\alpha}{v-\lambda}\, d\lambda = 0,$$

ce qui résulte des expressions assignées à λ et à v

Ce cas particulier examiné, cherchons à quelle condition il est possible de transformer l'un dans l'autre les deux éléments linéaires

$$ds_1^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A_0'' \frac{u-\lambda}{u-\alpha} d\alpha^2,$$

$$ds_2^2 = \frac{4\rho^2 \lambda'\, d\alpha\, dv}{(v-\lambda)^2} - 2\rho A_0'' \lambda' \frac{v-\alpha}{v-\lambda} d\alpha^2,$$

où λ' désigne la dérivée de la fonction

$$\lambda = \frac{A''(\alpha)}{A_0''(\alpha)}.$$

En convenant d'attribuer à la lettre α la même signification dans ces deux éléments linéaires, nous ne traitons pas dans toute sa généralité le problème de l'application des deux nappes (E_1) et (E_2) l'une sur l'autre; mais nous faisons, comme il est naturel, correspondre entre elles les deux génératrices (G_1) et (G_2) qui appartiennent à la même sphère enveloppée.

Supprimant le facteur commun $4\rho^2\, d\alpha$, nous obtenons l'équation aux différentielles totales

$$\frac{du}{(u-\alpha)^2} + \frac{A_0''}{2\rho} \frac{u-\lambda}{u-\alpha} d\alpha = \frac{\lambda'\, dv}{(v-\lambda)^2} - \frac{A_0''\lambda'}{2\rho} \frac{v-\alpha}{v-\lambda} d\alpha,$$

d'où l'on déduit visiblement

$$\frac{1}{u-\alpha} = \frac{\lambda'}{v-\lambda} + \frac{\mu(\alpha)}{2}.$$

Substituons l'expression ainsi obtenue pour u dans l'équation précédente. Il vient, après réductions,

$$\frac{\lambda'\mu - \lambda''}{v-\lambda} - \frac{\mu'}{2} + \frac{\mu^2}{4} + \frac{A_0''}{2\rho}[2(\lambda'+1) - (\lambda-\alpha)\mu] = 0.$$

Le premier terme seul dépend de v. En égalant son numérateur à zéro, on détermine la fonction inconnue

$$\mu(\alpha) = \frac{\lambda''}{\lambda'},$$

et il reste la condition d'applicabilité cherchée

$$(1) \qquad 2\mu' - \mu^2 = \frac{A_0''}{\rho}[2(\lambda'+1) - (\lambda-\alpha)\mu]$$

En raison de l'expression trouvée pour μ et de la signification de λ, cette relation contient les dérivées *du cinquième ordre* des fonctions A et A_0. Pour l'intégrer une première fois et l'interpréter, remarquons que l'expression qui figure entre crochets au second membre, savoir :

$$\mathfrak{M} = 2(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu,$$

exprime par son évanouissement que le lieu (Γ) des centres des sphères enveloppées appartient à un plan non isotrope (n° 6). Rappelons aussi qu'en vertu des équations (II) et de l'hypothèse $\rho = S$, on a

$$2\rho' = 2S' = A'' - \alpha A''_0 = A''_0(\lambda - \alpha),$$

de sorte que la condition (1) s'écrit

$$(1)' \qquad 2\mu' - \mu^2 = \frac{2S'\mathfrak{M}}{(\lambda - \alpha)S}.$$

Or, si l'on se reporte à la relation précédemment établie (n° 6) entre le rayon de courbure R et le rayon de torsion T d'une courbe représentée par les mêmes équations que la courbe (Γ), on voit qu'en introduisant le symbole $\mathfrak{M}$ on a

$$\frac{R^2S^2}{T^2} = -\frac{\mathfrak{M}^2S^2}{16\lambda'}.$$

Je dis qu'en égalant à zéro la dérivée logarithmique du second membre, on obtient précisément la condition (1)'. Si l'on calcule, en effet, la dérivée

$$\mathfrak{M}' = 2\lambda'' - (\lambda' - 1)\mu - (\lambda - \alpha)\mu'$$

et qu'on y remplace λ'' par $\mu\lambda'$, il vient

$$\mathfrak{M}' = \mu(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu'.$$

Dès lors on a

$$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} + \frac{S'}{S} - \frac{\lambda''}{2\lambda'} = \frac{\mu(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu'}{2(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu} + \frac{S'}{S} - \frac{\mu}{2} = 0.$$

Réunissant enfin les deux termes extrêmes, on trouve

$$\frac{(\mu^2 - 2\mu')(\lambda - \alpha)}{2\mathfrak{M}} + \frac{S'}{S} = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (1)'. En conséquence, *pour que les deux nappes d'un périsphère réglé, supposées n'avoir pas leur courbure totale constante, soient applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes qui appartiennent à la même sphère enveloppée, il faut et il suffit qu'il existe entre le rayon de courbure* R, *le rayon de torsion* T *et l'arc* S *de la courbe* (Γ), *lieu des centres des sphères enveloppées, une relation de la forme*

$$\frac{RS}{T} = \text{const.}$$

Il suffit de supposer la constante égale à zéro pour être ramené au cas particulier d'applicabilité où, la courbe (Γ) étant tracée sur un plan non isotrope, les deux nappes sont symétriques par rapport à ce plan.

V. — Digression sur une classe étendue de surfaces et sur deux problèmes d'applicabilité.

12. D'après ce qui a été vu plus haut (n° 4), les surfaces à lignes de courbure confondues rentrent dans la classe plus générale des surfaces dont la courbure totale K ne dépend que de l'un des paramètres des lignes minima.

Ces surfaces que nous appellerons, pour abréger, *surfaces* (K_m), doivent être remarquées; car, en vertu de leur définition même, les deux paramètres différentiels $\Delta_1 K$ et $\Delta_2 K$, calculés à l'aide de l'élément linéaire ds^2, sont identiquement nuls. En conséquence, les surfaces (K_m), comme les surfaces à courbure totale constante, qui n'en sont qu'une variété, mettent en défaut la théorie classique de l'applicabilité, fondée sur l'emploi des paramètres différentiels. Il convient donc d'indiquer comment on reconnaîtra si deux surfaces (K_m) données sont applicables l'une sur l'autre.

Remarquons d'abord que, quel que soit le système de coordonnées curvilignes auxquelles une surface est rapportée, on n'a que des différentiations à effectuer pour reconnaître si la courbure totale K de cette surface est ou n'est pas constante; et, dans ce dernier cas, on sait si elle conserve la même valeur sur chacune des courbes d'une famille de lignes minima : il faut et il suffit, en

effet, que le paramètre $\Delta_1 K$ calculé à l'aide de l'élément linéaire se réduise à zéro sans que les deux dérivés de K soient nulles. S'il en est ainsi, on peut prendre pour l'une des coordonnées curvilignes v la fonction K elle-même, l'autre famille de lignes coordonnées ($t =$ const.) restant quelconque. L'élément linéaire acquiert alors la forme

$$ds^2 = 2F\,dt\,dv + G\,dv^2,$$

puisque les lignes $v =$ const. sont des lignes minima. La courbure totale est représentée par la formule générale

$$(1) \qquad K = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial v} + BB_1 - A_1 C\right),$$

où les lettres mises en évidence désignent les symboles de Christoffel. Mais, comme E est nul, on trouve

$$B = \frac{G'_t}{2F}, \qquad A = \frac{F'_t}{F}, \qquad B_1 = 0, \qquad A_1 = 0,$$

de sorte que la relation précédente, où l'on fait $K = v$, devient

$$vF = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{G'_t}{2F} - \frac{F'_v}{F}\right).$$

Par une quadrature de différentielle ordinaire, on obtiendra une fonction u telle qu'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, v),$$

ce qui permettra d'écrire

$$vu = \frac{G'_t - 2u''_{vt}}{2u'_t}.$$

Chassant le dénominateur et intégrant par rapport à t, nous trouverons

$$G = vu^2 + 2u'_v + V,$$

V étant une fonction déterminée de v. Il vient alors

$$ds^2 = 2u'_t\,dt\,dv + (vu^2 + 2u'_v + V)\,dv^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$(2) \qquad ds^2 = 2\,du\,dv + (vu^2 + V)\,dv^2$$

Telle est donc la forme à laquelle on pourra toujours ramener l'élément linéaire d'une surface (K_m) dont la courbure totale n'est pas constante.

Considérons maintenant une autre surface (K_m). On mettra son élément linéaire sous la forme

$$ds_1^2 = 2\,du_1\,dv_1 + (v_1 u_1^2 + V_1)\,dv_1^2.$$

Pour appliquer cette surface, dont la courbe totale est v_1, sur la précédente, dont la courbure totale est v, on doit faire $v_1 = v$. L'identification des deux éléments linéaires donne alors l'équation

$$2\,du_1 + [vu_1^2 + V_1(v)]\,dv = 2\,du + [vu^2 + V(v)]\,dv,$$

qui exige visiblement que l'on ait

$$u_1 = u + W(v).$$

En substituant cette expression de u_1, on trouve

$$2W' + 2uvW + vW^2 + V_1(v) = V(v).$$

En conséquence. la fonction W se réduit à zéro et il reste, comme seule condition d'applicabilité, $V_1(v) = V(v)$.

13. Voici encore deux résultats que met en évidence l'expression (2) trouvée pour l'élément linéaire d'une surface (K_m).

1° *Toute surface dont la courbure totale ne dépend que de l'un des paramètres des lignes minima est applicable sur une infinité de surfaces à génératrices isotropes dépendant d'une fonction arbitraire.*

Considérons, en effet, une surface réglée, représentée par les formules

$$x = \xi + \lambda u, \qquad y = \upsilon + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u.$$

Pour identifier son élément linéaire avec l'expression, on doit établir entre les six fonctions ξ, υ, ζ; λ, μ, ν de la variable v et leurs dérivées premières *les relations nécessaires et suffisantes*

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0, \qquad \lambda\xi' + \mu\upsilon' + \nu\zeta' = 1, \qquad \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = v,$$
$$\lambda'\xi' + \mu'\upsilon' + \nu'\zeta' = 0, \qquad \xi'^2 + \upsilon'^2 + \zeta'^2 = V,$$

qui sont au nombre de cinq. Il reste donc une fonction arbitraire.

2° *L'élément linéaire de toute surface* (K_m), *multipliée par la courbure totale, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1.

En effet, d'après la formule générale (1) rappelée plus haut (n° **12**), la courbure totale de la forme quadratique

$$2v\,du\,dv + (v^2u^2 + vV)\,dv^2$$

est bien égale à 1.

14. On sait que deux surfaces, dont les courbures totales sont constantes et égales, sont applicables l'une sur l'autre d'une triple infinité de manières, mais que, pour réaliser cette application, il faut trouver une fonction de deux variables satisfaisant à *deux équations de Riccati.* Tout revient, en effet, à chercher les génératrices rectilignes d'une sphère, connaissant son élément linéaire, et c'est à ce même problème qu'on est ramené toutes les fois qu'on doit *déterminer une surface connaissant ses deux formes quadratiques fondamentales* (¹).

En raison de l'importance de cette question, il ne sera peut-être pas sans intérêt d'établir la proposition suivante :

Théorème. — *Connaissant l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1 *et l'une des familles de lignes minima, pour mettre cet élément linéaire sous la forme* $4(\alpha - \beta)^{-2}\,d\alpha\,d\beta$, *on n'a à intégrer qu'une seule équation de Riccati.*

En effet, on sait, par hypothèse, ramener l'élément linéaire de la sphère donnée à la forme

$$ds^2 = 2F\,dt\,dv + G\,dv^2.$$

En répétant avec une légère modification les calculs du n° **12**, on reconnaît que cette expression peut s'écrire

$$ds^2 = 2\,du\,dv + (u^2 + V)\,dv^2.$$

Il s'agit alors de déterminer α et β en fonction de u et de v, de

(¹) *Voir* à ce sujet ma Note intitulée : *Détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVII, 1898).

façon qu'on ait identiquement

$$\frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 2\,du\,dv + (u^2+V)\,dv^2.$$

Or ceci exige que α ou β ne dépende que de v. Nous poserons donc

$$\alpha = \alpha(v), \qquad d\alpha = \alpha'(v)\,dv,$$

et il viendra

$$\frac{4\alpha'\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 2\,du + (u^2+V)\,dv.$$

Cette équation aux différentielles totales équivaut au système

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{2\alpha'}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{u^2+V}{2},$$

dont la condition d'intégrabilité donne

$$(4) \qquad u = \frac{2\alpha'}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha''}{\alpha'}.$$

Cette expression de u vérifie identiquement la première des équations (3). En la substituant dans la seconde, on trouve, après réductions,

$$(5) \qquad \frac{d}{dv}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 = \frac{V}{2},$$

ce qui est une équation de Riccati relativement à la fonction $\alpha'' : \alpha'$ de la variable v. Connaissant $\alpha'' : \alpha'$, on obtiendra α par deux quadratures et l'équation (4) donnera β en fonction de u et de v. Si l'on met l'équation ci-dessus sous la forme équivalente

$$\sqrt{\alpha'}\,\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\right) = -\frac{V}{2},$$

son premier membre est la dérivée schwarzienne de α; or, on sait que, si l'on connaît une solution particulière α_0 de cette équation, son intégrale générale est

$$\alpha = \frac{l\alpha_0 + m}{n\alpha_0 + p},$$

l, m, n, p étant des constantes arbitraires ($lp - mn \neq 0$).

Ceci étant rappelé, pour réaliser l'application de deux surfaces à courbure totale constante ($K = 1$), connaissant sur chacune

d'elles une famille de lignes minima, on donnera à leurs éléments linéaires les formes respectives

$$ds^2 = 2\,du\,dv + [u^2 + V(v)]\,dv^2, \qquad ds_1^2 = 2\,du_1\,dv_1 + [u_1^2 + V_1(v_1)]\,dv_1^2,$$

et l'on réalisera l'application de ces deux surfaces sur la sphère de rayon 1 par le procédé qui vient d'être exposé, ce qui exigera qu'on intègre *séparément* deux équations de Riccati du type (5), différant seulement par le nom de la variable et par le second membre.

VI. — Les surfaces a lignes de courbure confondues rapportées a leurs lignes minima et a leurs asymptotiques.

15. Pour rapporter les surfaces (O_k) à leurs lignes minima ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$), nous emploierons les formules qui dérivent de l'analyse par laquelle O. Bonnet a obtenu l'équation aux dérivées partielles des surfaces admettant l'élément linéaire $4\varphi^2(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta$. En se reportant à mes *Recherches sur les surfaces isothermiques* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1905 et 1906), on verra qu'on peut se donner arbitrairement une fonction $\tau(\alpha, \beta)$. Si l'on désigne par p, q la solution générale du système

$$(1) \qquad \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial\alpha}, \qquad \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta},$$

qui revient à cet autre

$$(2) \qquad \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\tau'_\alpha}{2\tau}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \tau\sqrt{p} = 0,$$

et par p_1, q_1 une seconde solution, également générale, de ce même système, on aura l'expression la plus générale des coordonnées (x, y, z) d'une surface rapportée à ses lignes minima en effectuant les trois quadratures

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} x + iy = \xi &= \int p\,d\alpha + q\,d\beta, \\ x - iy = \xi_1 &= \int p_1\,d\alpha + q_1\,d\beta, \\ z &= i\int \sqrt{pp_1}\,d\alpha + \sqrt{qq_1}\,d\beta. \end{aligned}\right.$$

L'élément linéaire prend alors la forme

$$(5)\qquad ds^2 = (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})^2\, d\alpha\, d\beta = 4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta.$$

On voit que p et q désignent les dérivées premières de ξ, et que, si s est sa dérivée seconde par rapport à α et à β, on a

$$(6)\qquad \tau = \frac{s^2}{4pq}.$$

La surface est pleinement déterminée de forme, à une symétrie près, si l'on se donne la fonction φ et la coordonnée isotrope ξ, qui sont liées par l'*équation de déformation*

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) - \frac{s^2}{\varphi^4} + \frac{4pq}{\varphi^4}\,\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0.$$

En outre, la courbure moyenne Ω et la courbure totale K sont données respectivement par les formules

$$(8)\qquad \Omega^2 = -\frac{\tau}{\varphi^2},$$

$$(9)\qquad K = -\frac{1}{\varphi^2}\,\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

d'où résulte pour l'élément linéaire l'expression

$$(10)\qquad ds^2 = -\frac{4\tau\, d\alpha\, d\beta}{\Omega^2}.$$

Enfin l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)d\beta^2 = 0.$$

16. Ces généralités rappelées, arrivons aux surfaces (O_k). Leurs deux familles de lignes de courbure étant confondues avec les courbes minima $\alpha =$ const., l'équation (11) entraîne

$$(11)'\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $q : \varphi^2$ est fonction de α seulement. L'équation de déformation se réduit alors à

$$(12)\qquad \tau = \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

par où l'on vérifie à nouveau que le carré de la courbure moyenne est égal à la courbure totale

$$\Omega^2 = K. \tag{13}$$

Réciproquement, l'égalité des deux rayons de courbure principaux, qui s'exprime par $\Omega^2 = K$, exige, en vertu de l'équation de déformation, qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que les deux familles de lignes de courbure se confondent avec l'une des familles de lignes minima.

Pour ne rien emprunter aux développements qui précèdent le présent paragraphe, nous allons établir que Ω ne dépend que de α. A cet effet, de la relation (11)' nous déduisons

$$\frac{\partial \log\varphi}{\partial\beta} = \frac{\partial \log\sqrt{q}}{\partial\beta},$$

d'où, en différentiant par rapport à α et tenant compte de la condition (12), on conclut

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{q}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{s}{2q} = \tau = \frac{s}{2q}\frac{s}{2p} = \frac{s}{2q}\frac{\partial \log\sqrt{p}}{\partial\beta}.$$

Rapprochant les membres extrêmes et intégrant, nous trouvons

$$\frac{s}{2q\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{q}} = f(\alpha).$$

Dès lors $\tau : q$ ne dépendant que de α, comme $q : \varphi^2$, le rapport $\tau : \varphi^2$ est aussi une fonction de α, ce qui justifie notre assertion.

Cela étant, dans la formule générale (9), nous pouvons remplacer la quantité K par son égale Ω^2, ce qui donne

$$1 = -\frac{1}{\Omega^2\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

et, comme nous venons de voir que Ω dépend seulement de α, cette

égalité subsistera si l'on remplace φ par $\Omega\varphi$ sous le signe logarithme; mais il vient ainsi

$$1 = -\frac{1}{\Omega^2\varphi^2}\frac{\partial^2 \log \Omega\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

ce qui signifie que la courbure totale de l'expression

$$4\Omega^2\varphi^2\,d\alpha\,d\beta = \Omega^2\,ds^2$$

est égale à l'unité. Ainsi *les surfaces* (O_k) *font partie des surfaces dont l'élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon* 1 *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne.*

Voici l'analyse par laquelle j'ai déterminé, dans le second des Mémoires précités (*A. E. N. S.*, 1906, p. 407-409), l'ensemble des surfaces qui jouissent de cette propriété. En écrivant que la forme $\Omega^2\,ds^2$, identique à $-4\tau\,d\alpha\,d\beta$, en vertu de la formule (10), a sa courbure totale égale à 1, on obtient l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 \log\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2\tau = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\tau = \frac{f'(\alpha)\,g'(\beta)}{[f(\alpha)+g(\beta)]^2},$$

f et g désignant deux fonctions arbitraires, f' et g' leurs dérivées. Mais on ne restreint pas la généralité en prenant

$$\tau = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \sqrt{\tau} = -\frac{1}{\alpha+\beta},$$

ce que nous ferons. La dérivée p d'une coordonnée isotrope ξ est l'intégrale générale de l'équation (3), où $\sqrt{\tau}$ est remplacée par l'expression qui vient d'être trouvée; l'autre dérivée q se déduit de p et de $\sqrt{\tau}$ par la relation (2). L'équation en p

$$\frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \frac{\sqrt{p}}{(\alpha+\beta)^2} = 0$$

a été intégrée par M. Goursat (*Bull. Soc. mathém. de France*,

t. XXV, 1897, p. 36). On en déduit

$$\sqrt{p} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - B',$$

A et B désignant deux fonctions arbitraires, l'une de α, l'autre de β, dont A′ et B′ sont les dérivées. Les dérivées d'une seconde coordonnée isotrope ξ_1 seront fournies par les formules analogues

$$\sqrt{p_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - B'_1,$$

et la dernière des formules (4) fera connaître la troisième coordonnée z.

Mais il faut ici, pour avoir les surfaces (O_k), exprimer que $\sqrt{\tau} : \sqrt{q}$ ne dépend que de α, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta}[A + B - B'(\alpha+\beta)] = (\alpha+\beta)B''.$$

La dérivée B″ étant nulle, la fonction B est un binome linéaire en β à coefficients constants; en modifiant légèrement la signification de A, on peut réduire ce binome à zéro et prendre

$$\sqrt{p} = \frac{A}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A}{\alpha+\beta}.$$

Comme $\sqrt{\tau} : \sqrt{q_1}$ doit aussi être indépendant de β, la dérivée B''_1 est nulle et l'on peut pareillement prendre

$$\sqrt{p_1} = \frac{A_1}{\alpha+\beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1}{\alpha+\beta}.$$

On vérifie alors aisément que $q : \varphi^2$ et $q_1 : \varphi^2$ ne dépendent que du paramètre α, de sorte qu'on a bien ainsi les surfaces cherchées.

L'application des formules (4) donne pour leurs coordonnées

$$x + iy = -\frac{A^2}{\alpha+\beta} + \int A'^2\, d\alpha, \qquad x - iy = -\frac{A_1^2}{\alpha+\beta} + \int A'^2_1\, d\alpha,$$

$$iz = -\frac{AA_1}{\alpha+\beta} + \int A'A'_1\, d\alpha.$$

Quant à l'élément linéaire, on trouve

$$ds^2 = \frac{AA'_1 - A'A_1}{(\alpha+\beta)^2}\, d\alpha\, d\beta. \tag{14}$$

Les surfaces de Serret, ayant leur courbure totale constante, sont caractérisées par la condition supplémentaire

$$AA'_1 - A'A_1 = \text{const.}$$

17. Nous allons nous servir de l'expression générale de ds^2 pour *chercher parmi les surfaces à lignes de courbure confondues celles qui sont harmoniques,* c'est-à-dire celles dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2).$$

Pour qu'un élément linéaire $\lambda(x, y)\,dx\,dy$ soit réductible à cette forme, il faut et il suffit, comme l'a démontré M. Darboux (*Théorie des surfaces,* t. II, p. 208), qu'il existe deux fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ vérifiant l'équation aux fonctions mêlées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{X}\,\frac{\partial\lambda\sqrt{X}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{Y}\,\frac{\partial\lambda\sqrt{Y}}{\partial y}\right),$$

dont le développement est le suivant :

$$(15)\qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + Y''\lambda.$$

Or il est visible que l'élément linéaire (14) peut s'écrire $\lambda\,dx\,dy$, si l'on prend

$$\lambda = \frac{h(x)}{(x-y)^2};$$

de plus, sa courbure totale est constante quand $h(x)$ se réduit à une constante, et alors seulement.

Remplaçant λ par l'expression précédente dans l'équation (15), chassant les dénominateurs et divisant par h, on trouve

$$\begin{aligned}12(X-Y) - (x-y)\left(6X' + 8X\frac{h'}{h} + 6Y'\right)\\ + (x-y)^2\left(X'' + 3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h} - Y''\right) = 0.\end{aligned}$$

En faisant $y = x$, on reconnaît que Y est la même fonction de y que X de x. Or, si l'on différentie le premier membre deux fois

par rapport à x et deux fois par rapport à y, il vient

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(X'' + 3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h}\right) - \frac{d^4 Y}{dy^4} = 0,$$

ce qui montre que Y est un polynome du quatrième degré en y. On a donc

$$Y = ly^4 + my^3 + ny^2 + py + q, \qquad X = lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q.$$

On sait (Darboux, *loc. cit.*, p. 210) et l'on vérifie aisément que, quelles que soient les cinq constantes l, m, n, p, q, les termes indépendants de h' et de h'' disparaissent tous quand on substitue les polynomes X et Y dans l'équation proposée; après suppression du facteur commun $(x - y)$, il reste

$$-8X\frac{h'}{h} + (x - y)\left(3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h}\right) = 0.$$

Pour que cette relation ait lieu quels que soient x et y, il faut et il suffit que h' soit nul. En conséquence, *les seules surfaces à lignes de courbure confondues qui soient harmoniques sont celles dont la courbure totale est constante* (surfaces de Serret).

Ce résultat complète une proposition que j'ai établie autrefois (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, 1890, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IX, 1895). J'ai prouvé que *toute surface harmonique réglée est applicable sur une surface de révolution ou sur une quadrique;* mais j'ai laissé de côté les surfaces réglées à génératrices isotropes. D'après ce qui précède, la proposition est vraie sans aucune restriction.

18. Nous nous proposerons enfin de rapporter les surfaces (O_k) à leurs lignes asymptotiques. Pour que les formules de M. Lelieuvre,

$$(16)\qquad \begin{cases} dx = (mn'_u - nm'_u)\,du - (mn'_v - nm'_v)\,dv, \\ dy = (nl'_u - ln'_u)\,du - (nl'_v - ln'_v)\,dv, \\ dz = (lm'_u - ml'_u)\,du - (lm'_v - ml'_v)\,dv, \end{cases}$$

représentent des surfaces réglées dont les lignes $u =$ const. soient les génératrices, il faut, comme l'a montré M. Goursat (*Bull. Soc. mathém. de France*, t. XXIV, 1896), que l'équation de Moutard

$$\theta''_{uv} = \rho\theta,$$

à laquelle satisfont les fonctions l, m et n, soit de rang 1 ou de rang 2. Si l'équation est de rang 1, c'est-à-dire si ρ est nul, la surface, supposée réglée, est nécessairement une surface à plan directeur. Or, pour les surfaces à génératrices isotropes, le cône directeur est un cône isotrope; si donc une telle surface est à plan directeur, ses génératrices sont parallèles à l'une des génératrices suivant lesquelles le cône directeur coupe un plan mené par son sommet parallèlement au plan directeur : leur direction étant fixe, la surface est un cylindre et non une surface (O_k).

Quand l'équation à laquelle satisfont l, m et n est de rang 2, on peut, sans restreindre la généralité, la ramener à la forme

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{2}{(u-v)^2}.$$

Cette équation, l'une de celles qui ont été traitées par Euler, a pour intégrale générale

$$\theta = 2\frac{U-V}{u-v} - U' - V',$$

U et V désignant respectivement deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v, dont U' et V' sont les dérivées. Telle est la forme analytique des fonctions l, m, n. Mais, si la surface correspondante est réglée, les normales menées aux divers points d'une génératrice (u = const.) devant être perpendiculaires à cette génératrice, il existe entre l, m et n une relation identique de la forme

$$l\,A(u) + m\,B(u) + n\,C(u) = 0.$$

Cette condition entraîne pour l, m, n, ainsi que l'a indiqué M. Goursat (*loc. cit.*), les formes suivantes :

$$l = \frac{2U_1}{u-v} - U'_1, \qquad m = \frac{2U_2}{u-v} - U'_2, \qquad n = \frac{2U_3}{u-v} - U'_3.$$

Ces expressions sont générales et conviennent à toutes les surfaces réglées qui n'ont pas de plan directeur. Introduisons l'hypothèse qui caractérise les surfaces (O_k), savoir que *la courbure totale* K *dépend de la seule variable* u. D'après la relation bien connue

$$K = -(l^2 + m^2 + n^2)^{-2},$$

on devra avoir

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{4\Sigma U_i^2}{(u-v)^2} - \frac{4\Sigma U_i U_i'}{u-v} + \Sigma U_i'^2 = \varphi(u),$$

ce qui entraîne visiblement la condition nécessaire et suffisante

$$\Sigma U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0.$$

On n'aura donc qu'à poser, par exemple,

$$U_1 + iU_2 = U^2, \qquad U - iU_2 = -U_0^2, \qquad U_3 = UU_0,$$

ce qui donnera

$$l^2 + m^2 + n^2 = (UU_0' - U_0U')^2.$$

On aura ainsi l, m, n exprimés à l'aide de deux fonctions arbitraires U et U_0 et, par suite, les expressions cherchées de dx, dy dz par les formules (16).

Remarque. — Les trois fonctions l, m, n étant choisies comme il vient d'être dit, la somme $l^2 + m^2 + n^2$ se réduit à une fonction de u. Dès lors, en vertu d'un théorème dû à M. L. Bianchi (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XVIII, 1890), la surface (S) enveloppe du plan

$$lx + my + nz + p = 0,$$

où p est une solution quelconque de l'équation (E), admet le réseau (u, v) comme *réseau conjugué persistant*, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire, qui ont même élément linéaire que (S) et sur lesquelles le réseau (u, v) est conjugué. On est ainsi conduit tout naturellement aux résultats très généraux que M. Drach a trouvés par une autre voie (*C. R. Acad. des Sciences*, t. CXXXVI, 27 avril 1903) relativement au problème des réseaux conjugués persistants et qui m'avaient échappé quand j'ai publié ma Note récente sur le même sujet (*C. R. Acad. des Sciences*, t. CXLVI, 6 avril 1908).

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

INTRODUCTION.

1. L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$(1) \qquad M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

vérifiant des conditions initiales singulières a fait l'objet de plusieurs travaux : Briot et Bouquet, MM. Picard, Poincaré, Bendixson, Horn, Lindelöf, Autonne, Darboux, Königsberger ont publié des résultats, par lesquels la question est presque résolue; je ne veux pas donner ici la bibliographie de cette partie importante de la théorie des équations différentielles; on la trouvera complète dans l'intéressante Thèse de M. H. Dulac : *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Cahier IX, 1904), qui a apporté des compléments considérables aux résultats des auteurs ci-dessus cités. Malgré toutes ces recherches, il reste quelques singularités qui n'ont pas encore été étudiées d'une façon complète.

On sait que Briot et Bouquet sont arrivés à établir, dans des cas très étendus, une réduction à des formes simples qu'on étudie plus aisément; le lecteur peut se reporter à leurs travaux mémorables [*Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXVI, 1856, p. 161)] ou bien au Tome III du *Traité d'Analyse* de M. E. Picard (p. 35-39). Parmi ces formes, auxquelles nous conduit la réduction de Briot et Bouquet, il y en a une très intéressante, à cause des circonstances particulières qu'elle présente : je veux parler de la forme

$$(2) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y) \qquad (\alpha \neq 0),$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction holomorphe des x et y dans le voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ s'annulant pour $x = 0$ et $y = 0$. Nous

supposons, bien entendu, que la fonction $f(x, y)$ ne contienne pas de terme de la forme αy. Le calcul des coefficients du développement taylorien peut se faire de proche en proche par l'équation (2), grâce à des différentiations successives; mais le développement n'est pas convergent, comme on le constate aisément sur des exemples simples. M. Picard (*loc. cit.*) donne le suivant,

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + bx \qquad (\alpha \neq 0),$$

dans lequel on aperçoit immédiatement la divergence du développement taylorien, et il s'exprime ainsi (p. 39) : « La singularité $x = 0$ est, en général, pour cette équation une singularité de nature essentielle; il y aurait là un important et difficile sujet de recherches. » C'est à ce sujet que se rapporte le présent travail.

I. — Les résultats de Briot et Bouquet.

2. Briot et Bouquet ont examiné l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + x\varphi(x), \tag{3}$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, et ils ont recherché *pour quelles valeurs du paramètre α l'équation différentielle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annulant pour cette valeur de x.*

Ils ont résolu le problème sous la forme suivante :

I. *Pour que l'équation* (3) *admette une équation holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annulant pour $x = 0$, il faut et il suffit que le nombre α soit un zéro d'une fonction entière*

$$H(x) = b_0 + \frac{b_1}{1} x + \frac{b_2}{1.2} x^2 + \frac{b_3}{1.2.3} x^3 + \ldots + \frac{b_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \ldots, \tag{4}$$

où les nombres $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ désignent les coefficients du développement taylorien de la fonction

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots.$$

On démontre aisément ce théorème en calculant de proche en

proche les coefficients du développement taylorien à l'aide de l'équation (3), par l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés. (*Voir* le Mémoire précité de Briot et Bouquet.)

Le calcul du développement taylorien, qui satisfait formellement à l'équation différentielle (3), montre aussi que cette série diverge pour toute valeur de α n'annulant pas la fonction $H(x)$ et que le coefficient de x^n dans cette série jouit de la propriété suivante :

II. *Si l'on désigne par* A_n *le coefficient de* x^n *dans la série* $H(x)$, *le rapport*

$$\sqrt[n]{A_n} : \sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)} \tag{5}$$

tend vers une valeur finie et différente de zéro, lorsque l'indice n croît indéfiniment, pour toute valeur de α *n'annulant pas la fonction* $H(x)$.

Il serait très intéressant d'étendre ces propriétés, dont jouit l'exemple simple étudié par Briot et Bouquet, au cas le plus général de l'équation (2). C'est ce que nous allons faire pour la propriété II en prouvant que *le rapport*

$$\sqrt[n]{A_n} : \sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)}$$

ne tend jamais vers l'infini, et cela dans le cas le plus général de l'équation (2). De plus, nous faisons une étude détaillée de la série qui satisfait formellement à une équation de la forme (2), et nous mettons en lumière l'origine et les raisons générales de sa divergence, d'où résulte un théorème intéressant justifiant l'assertion déjà mentionnée, d'après laquelle l'équation (2) n'admet pas, en général, d'intégrale holomorphe s'annulant pour $x = 0$. Un résumé de nos résultats a été publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (24 février 1908).

II. — Comparaison de la série avec une autre série convergente.

3. La dérivée d'ordre $n^{\text{ième}}$ du premier membre de l'équation (2) est égale pour $x = 0$ à

$$n(n-1)\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0, \tag{6}$$

l'indice zéro désignant la valeur de la dérivée pour $x = 0$.

Si, d'autre part, nous différentions n fois l'expression xy, nous remarquons que, pour $x = 0$, la $n^{\text{ième}}$ dérivée xy est égale à

$$n\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0. \tag{7}$$

Si donc nous considérons l'équation ayant pour premier membre l'expression xy et pour second membre le second membre de l'équation différentielle donnée (2), il y a lieu à faire un rapprochement entre la série définie par l'équation différentielle (2) et la série obtenue par des différentiations successives de l'équation *finie*

$$xy = \alpha y + f(x, y) \tag{8}$$

que nous appellerons l'*équation* (E). Cette équation définit une fonction $y = g(x)$ qui est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annule pour $x = 0$, d'après un théorème bien connu de Weierstrass (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 241-245, et *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, von K. Weierstrass).

Le rapprochement des deux séries, que nous nous proposons de faire, tient à la remarque suivante : Si, en effectuant ces différentiations successives de l'équation différentielle, nous omettons chaque fois le facteur $n - 1$ qui se présente dans l'expression (6) et non pas dans l'expression (7), on déduit immédiatement de la série satisfaisant à l'équation différentielle la série satisfaisant à l'équation (E), qui est bien convergente dans un cercle ayant comme centre le point $x = 0$. Je précise : après avoir différentié un certain nombre de fois l'équation différentielle, nous remarquons qu'il se présente comme facteurs deux nombres entiers consécutifs dans le premier membre; si donc chaque fois nous divisons ce membre par le plus petit de ces facteurs entiers, que nous supprimons ainsi, nous obtenons, au lieu de la série satisfaisant à l'équation différentielle, la série satisfaisant à l'équation (E) ou (8), qui converge dans le voisinage de $x = 0$.

Cette remarque, qui est fondamentale pour notre but, nous conduit à la conclusion que la présence de ces facteurs $1, 2, 3, \ldots, n - 1$, que nous devons supprimer après chaque différentiation pour obtenir la série satisfaisant à l'équation (E), est le fait prin-

cipal qui entraîne, en général, la divergence de la série de Taylor satisfaisant formellement à l'équation différentielle.

Nous appellerons *facteurs de divergence* ces facteurs : 2 pour la dérivée troisième, 3 pour la dérivée quatrième, etc., $n-1$ pour la dérivée $y^{(n)}$.

L'étude approfondie de la manière dont les facteurs de divergence s'introduisent dans les dérivations successives de l'équation différentielle et se rattachent à la série convergente définie par l'équation (E) nous permettra d'obtenir des résultats intéressants.

4. Soit

$$\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n + \ldots \tag{9}$$

la série qui satisfait formellement à l'équation différentielle; remarquons que le coefficient γ_n peut s'écrire de la façon suivante,

$$\gamma_n = \sum a_1 a_2 \ldots a_m A_{a_1 a_2 \ldots a_m}, \tag{10}$$

où les $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des facteurs de divergence et où la somme

$$c_n = \sum A_{a_1 a_2 \ldots a_m} \tag{11}$$

désigne le coefficient de x^n dans la série

$$c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{11'}$$

qui satisfait à l'équation (E).

Parmi les termes de la somme (10), il y en a un qui contient le produit $1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$ de facteurs de divergence. Nous allons maintenant démontrer qu'aucun des autres termes n'aura un coefficient de divergence dépassant le produit $1.2.3\ldots(n-1)$; il suffit de démontrer que le coefficient γ_n jouit de cette propriété, s'il en est ainsi des coefficients précédents. A cet effet, remarquons que l'équation obtenue par n différentiations successives de l'équation (2) permet d'exprimer la dérivée $y^{(n)}$ en fonction des dérivées précédentes, de façon que dans chaque terme la somme des indices des dérivées ne dépasse pas n; ainsi, la dérivée $y^{(n-1)}$ qui se trouve

au premier membre se multiplie par le nouveau facteur de divergence $n-1$, puisque l'autre facteur n n'est pas un facteur de divergence comme appartenant aussi à l'équation de comparaison (E), et, par conséquent, le plus grand coefficient de divergence sera égal à $1.2.3\ldots(n-1)$ dans ces termes du premier membre, puisque, par hypothèse, le plus grand coefficient de divergence dans la dérivée $y^{(n-1)}$ est égal à $1.2.3.4\ldots(n-2)$. En ce qui concerne le second membre, les termes qui y figurent prennent pour $x=0$ et $y=0$ la forme suivante,

$$(12) \qquad g(y')_0^{l_1}(y'')_0^{l_2}\ldots(y^{(\nu)})_0^{l_\nu} \qquad (\nu < n),$$

g désignant un certain nombre n'ayant pas de facteurs de divergence et la somme

$$(13) \qquad l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + \nu l_\nu \leqq n.$$

D'après notre hypothèse, le plus grand coefficient de divergence de $(y''_0)^{l_2}$ est égal à 1^{l_2}, celui de $(y'''_0)^{l_3}$ est égal à $(1.2)^{l_3}$, ..., et, en général, le plus grand coefficient de divergence dans $(y_0^{(\nu)})^{l_\nu}$ est égal à

$$[1.2.3\ldots(\nu-1)^{l_\nu}];$$

par conséquent, le plus grand coefficient de divergence du terme (12) sera égal à

$$(14) \qquad (1.2)^{l_3}(1.2.3)^{l_4}\ldots[1.2.3\ldots(\nu-1)]^{l_\nu}$$

et ce produit est évidemment inférieur ou égal au produit $1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$, parce que le nombre des facteurs du produit (14), qui sont différents de l'unité, est égal à

$$l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \ldots + (\nu-2)l_\nu \leqq n-2.$$

En effet, cette somme est égale à

$$(15) \qquad l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + \nu l_\nu - l_1 - 2(l_2 + l_3 + \ldots + l_\nu);$$

si les exposants $l_2, l_3, \ldots, l_\nu$ sont tous nuls, le terme en question ne contient aucun facteur de divergence; dans le cas contraire, le nombre $l_1 + 2(l_2 + l_3 + \ldots + l_\nu)$ est au moins égal à 2 et, par conséquent, le nombre (15) est au plus égal à

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + \nu l_\nu - 2 \leqq n-2,$$

parce que le nombre $l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + \nu l_\nu$ est au plus égal à n.

Il résulte immédiatement de là que, pour déduire le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ du produit (14), il faut remplacer certains facteurs de divergence par d'autres plus grands.

III. — Rapidité de la divergence.

5. Ayant démontré dans le paragraphe précédent que les coefficients de divergence $a_1, a_2, \ldots, a_m$, qui figurent dans l'expression (10) de γ_n, sont inférieurs ou égaux au produit $1.2.3\ldots(n-1)$, nous pouvons maintenant établir une limite supérieure du coefficient γ_n de la série (9). Nous avons, en effet

$$(16) \qquad |\gamma_n| < 1.2.3\ldots(n-1)\sum |A_{a_1 a_2 \ldots a_m}|,$$

le symbole $|A_{a_1 a_2 \ldots a_m}|$ désignant le module de $A_{a_1 a_2 \ldots a_m}$. Cela posé, écrivons l'équation différentielle donnée sous la forme

$$x^2 y' - f(x, y) = \alpha y,$$

et remplaçons tous les coefficients des termes du premier membre par leurs modules; nous obtenons ainsi l'équation différentielle

$$(17) \qquad x^2 y' + F(x, y) = \alpha y,$$

la fonction $F(x, y)$ ayant comme coefficients les modules des coefficients de la fonction $f(x, y)$. Les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ de notre série ne dépassent pas évidemment les coefficients correspondants de la série de Taylor définie par l'équation (17), et les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ de la série (11') ne dépassent pas, pour la même raison, ceux de la série taylorienne définie par l'équation

$$(18) \qquad xy + F(x, y) = \alpha y.$$

La fonction $F(x, y)$ joue ici le rôle d'une fonction majorante. Si, en effet, nous considérons la quantité c_n comme fonction des coefficients de la série qui définit $f(x, y)$, la substitution ci-dessus indiquée est équivalente au remplacement des termes de cette

expression de c_n par leurs modules. Soit

$$\omega(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_n x^n + \ldots \tag{19}$$

la série de Taylor définie par l'équation (18); elle définit, d'après le théorème fondamental de Weierstrass, une fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, et, par conséquent, la limite de $\sqrt[n]{\delta_n}$ pour $n = \infty$ est un nombre fini; il en est donc de même de la limite de $\sqrt[n]{c_n}$, grâce à la relation

$$c_n \leqq \delta_n.$$

Cela étant, notre inégalité (16) devient

$$|\gamma_n| < 1.2.3\ldots(n-1)\delta_n, \tag{20}$$

le nombre δ_n étant, bien entendu, réel et positif.

L'inégalité (20) peut s'écrire aussi de la façon suivante,

$$\sqrt[n]{|\gamma_n|} < \sqrt[n]{n!}\sqrt[n]{\delta_n}$$

ou bien

$$\sqrt[n]{|\gamma_n|} : \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\delta_n},$$

ce qui démontre que le rapport $\sqrt[n]{\gamma_n} : \sqrt[n]{n!}$ tend vers une limite finie, lorsque n croît indéfiniment, parce qu'il en est ainsi de la quantité $\sqrt[n]{\delta_n}$, d'après l'holomorphie de la fonction $\omega(x)$ dans le voisinage de $x = 0$.

Cette analyse se résume dans l'énoncé suivant :

Théorème I. — *Dans les cas où la quantité $\sqrt[n]{\gamma_n}$ croît avec n, elle ne croît jamais plus vite que $\sqrt[n]{n!}$, et nous avons ainsi une limite supérieure de la vitesse de la divergence de la série qui satisfait formellement à l'équation différentielle donnée : le rapport $\sqrt[n]{\gamma_n} : \sqrt[n]{n!}$ ne tend jamais vers l'infini, lorsque n croît indéfiniment.*

La limite supérieure que ce théorème assigne, pour la rapidité de la divergence de la série considérée dans ce travail, est atteinte dans les cas particuliers cités par M. Picard, ainsi que par Briot et Bouquet (*voir* ci-dessus, n^{os} **1** et **2**).

IV. — Un cas particulier.

6. Considérons l'équation

$$x^2y' + F(x, y) = \alpha y, \tag{21}$$

où $F(x, y)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = 0$ et $y = 0$, et ayant comme coefficients des nombres réels et positifs; $F(x, y)$ ne contient pas, bien entendu, de terme linéaire en y de la forme αy. Dans ce cas, les nombres $A_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ de la formule (10) sont tous positifs et nous pouvons écrire

$$\gamma_n = 1.2.3\ldots(n-1)\sum \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{1.2.3\ldots(n-1)} A_{a_1 a_2 \ldots a_m},$$

les rapports $\frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{1.2.3\ldots(n-1)}$ étant au plus égaux à l'unité et au moins égaux à $\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$. Nous avons en effet démontré (n° 4) que les produits $a_1 a_2 \ldots a_m$ ne dépassent pas $1.2.3\ldots(n-1)$. Cela posé, nous pouvons indiquer des termes de la somme ci-dessus qui ne tendent pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Si, en effet, nous posons

$$F(x, y) = x B(x) + B_1(x) y + B_2(x) y^2 + \ldots,$$
$$B(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots,$$

dans l'expression de la dérivée $y^{(n)}$ obtenue par différentiations successives de l'équation (21) et correspondant aux valeurs initiales $x = 0$ et $y = 0$ figurera le terme

$$\frac{p_0}{\alpha^n}(1.2.3\ldots n)[1.2.3\ldots(n-1)].$$

Ce terme figurera sous la forme

$$\frac{p_0}{\alpha^n}[1.2.3\ldots(n-1)]$$

dans l'expression de γ_n, et, si nous posons

$$\gamma_n = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\alpha^n} q_n,$$

l'expression de q_n contiendra le terme p_0 qui est constant. Il suit de là que la quantité q_n ne saurait tendre vers zéro, et, par conséquent, la quantité $\sqrt[n]{\gamma_n}$ tend vers l'infini avec n. Nous concluons donc que *l'équation différentielle* (21) *n'admet pas d'intégrale holomorphe.*

Ce résultat est d'autant plus intéressant que nous trouvons chez plusieurs auteurs l'assertion que les équations différentielles, considérées dans ce travail n'admettent pas, *en général,* d'intégrale holomorphe.

Cette assertion n'est jusqu'ici appuyée que sur des exemples très particuliers (voir *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 85-39, et la Thèse déjà citée de M. Dulac). Notre méthode met en lumière la cause de la divergence du développement taylorien, déduit de l'équation différentielle; d'ailleurs, le cas étudié ci-dessus, et dans lequel l'absence de l'intégrale holomorphe est démontrée, présente le caractère le plus général, au point de vue fonctionnel et différentiel, des équations différentielles considérées dans ce travail. En effet, la restriction employée pour arriver à ce résultat ne touche pas au fond du caractère fonctionnel et différentiel des équations les plus générales que nous considérons ici. Si, par exemple, nous nous bornons au domaine réel, la restriction indiquée ne concerne que le signe des coefficients des fonctions $B(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... de l'équation (2) écrite sous la forme

$$x^2y' = \alpha y + x\,B(x) + x\,B_1(x)\,y + B_2(x)\,y^2 + \ldots \qquad (\alpha \neq 0).$$

Le fait fondamental qui résulte de ces recherches consiste en ce que la divergence de la série taylorienne déduite des équations différentielles considérées est due à la présence de quelques nombres entiers, appelés *facteurs de divergence,* qui s'introduisent dans le calcul des dérivées successives. Une étude analogue peut nous faire voir qu'il en est de même des équations plus générales

$$x^m y' = \alpha y + f(x, y),$$

m étant un entier quelconque.

LES FONCTIONS IMPLICITES EN NOMBRE INFINI ET L'ÉQUATION INTÉGRALE NON LINÉAIRE;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

1. Après les mémorables travaux de M. Fredholm sur l'équation intégrale linéaire

$$(1) \qquad f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y) f(y)\, dy = G(x),$$

il est naturel de se demander quelles difficultés nouvelles se présenteront pour l'équation intégrale non linéaire.

Soient, par exemple, deux types

$$(2) \qquad f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y)\, P[f(y)]\, dy = G(x),$$

$$(3) \qquad f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y)\, e^{f(y)} \quad dy = G(x);$$

P est un polynome donné; F est le *noyau* donné; la fonction G est donnée et l'inconnue est la fonction f.

M. Goursat a montré tout l'intérêt que présentent les noyaux de la forme

$$(4) \qquad \sum_1^\infty g_p(x)\, h_p(y).$$

Nous les appellerons *noyaux de M. Goursat,* et n'étudierons que ceux-là.

Supposons d'abord la somme (4) limitée à n termes et prenons, pour simplifier l'exposition,

$$P(t) = t^2.$$

L'équation (2) donne aussitôt, les z étant des *constantes,*

$$f(x) = G(x) - \lambda \sum_1^n z_p g_p(x).$$

Portons cette valeur dans l'équation (2) : nous avons, pour

déterminer les z, n équations du second degré à n inconnues. Donc les z sont *fonctions algébriques* de λ.

Pour $n = 2$, nous avons à discuter l'intersection de deux coniques : λ étant quelconque, il y a quatre solutions, finies ou non, réelles ou non.

Pour $n = 3$, la discussion est déjà très difficile.

Pour mieux voir encore tout ce qui nous sépare ici du cas linéaire, examinons l'équation, aussi simplifiée que possible,

$$f(x) + \lambda \int_0^1 \overline{f(y)}^2 \, dy = G(x).$$

On a évidemment

$$f(x) = G(z) - \lambda z.$$

Et z est donné par une équation du second degré. Au voisinage de $\lambda = 0$, nous avons une solution f *finie* et une infinie.

D'autres considérations montrent encore la complexité des équations de M. Fredholm *non linéaires*, et, si je me décide à écrire cette Note, c'est surtout parce que je rencontrerai des systèmes très intéressants de *fonctions implicites en nombre infini*.

2. Soit donc, $\sum$ désignant une série infinie : $\sum_1^\infty$, l'équation

$$(1) \qquad f(x) + \lambda \int_0^1 \left[\sum g_p(x) h_p(y)\right] \overline{f(y)}^2 \, dy = G(x).$$

On a

$$(2) \qquad f(x) = G(x) - \lambda \sum z_n g_n(x);$$

z_n est une constante. Portons dans (1) la valeur de $f(x)$ [et de $f(y)$] tirée de l'équation (2); le coefficient de $g_p(x)$ doit être *nul*, d'où

$$(3) \qquad z_p = \int_0^1 h_p(y) \left\{ G\overline{(y)}^2 - 2\lambda G(y) \left[\sum z_n g_n(y)\right] + \lambda^2 \left[\sum z_n g_n(y)\right]^2 \right\} dy.$$

Donc les constantes z_p sont données par le système d'équa-

tions en nombre infini

$$(S) \qquad z_p = K_p - 2\lambda \sum_n \alpha_{pn} z_n + \lambda^2 \sum_n \sum_{n'} \beta_{pnn'} z_n z_{n'}.$$

Précisons le mode de convergence du *noyau*, en posant

$$g_n(x) = x^n, \qquad |h_n(y)| < \frac{H}{\lfloor n}, \qquad |G(y)| < M;$$

H et M sont des nombres positifs donnés.

Nous obtenons immédiatement les inégalités

$$\left\{ \begin{aligned} |K_p| &< \frac{HM^2}{\lfloor p}, \\ |\alpha_{pn}| &< \frac{HM}{\lfloor p} \frac{1}{n+1}, \\ |\beta_{pnn'}| = |\beta_{pn'n}| &< \frac{H}{\lfloor p} \frac{1}{n+n'+1}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons pouvoir résoudre *le système implicite infini* (S), au voisinage de $\lambda = 0$, par les approximations de M. Picard.

M. Goursat avait déjà, par ce moyen, résolu les systèmes d'équations en nombre fini (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1903).

Nous partons de la solution évidente

$$(4) \qquad z_p^0 = K_p$$

pour $\lambda = 0$.

D'où le calcul de z^1, z_p^2, etc., par les équations

$$(5) \qquad z_p^{q+1} = K_p - 2\lambda \sum_n \alpha_{pn} z_n^q + \lambda^2 \sum_n \sum_{n'} \beta_{pnn'} z_n^q z_{n'}^q.$$

1° Il faut que les z_n^q soient *limités* de façon que les séries écrites convergent.

2° Il faut que z_p^q ait une limite pour $q = \infty$, c'est-à-dire que la série σ_p *converge*, étant posé

$$\sigma_p = \sum_q (z_p^{q+1} - z_p^q).$$

3° Enfin, il faut étudier les conditions d'*unicité* de la solution.

3. *Première question.* — Si λ est assez petit, si l'on a, U étant un nombre *positif*,

$$|z_n^q| < \frac{L}{\lfloor n}, \qquad L = HM^2 + U,$$

il en sera de même pour

$$|z_n^{q+1}|.$$

Soit, en effet,

$$P = \sum_n \frac{1}{\lfloor n+1},$$

$$Q = \sum_n \sum_{n'} \frac{1}{n+n'+1} \frac{1}{\lfloor n} \frac{1}{\lfloor n'}.$$

Nous avons

$$|z_p^{q+1}| < \frac{HM^2 + 2\lambda HMLP + \lambda^2 HL^2 Q}{\lfloor p}.$$

Nous prendrons donc $\lambda \leqq \lambda_1$, de sorte que l'on ait

$$2\lambda HMLP + \lambda^2 HL^2 Q < U.$$

4. *Deuxième question.* — Posons

$$(1) \qquad \Delta_n^{q-1} = |z_n^q - z_n^{q-1}|,$$

et soit Δ^{q-1} un nombre supérieur ou égal au plus grand des Δ_n^{q-1} quand n prend toutes les valeurs entières. Si la série

$$(2) \qquad \sum_q \Delta^q$$

est convergente, *a fortiori* l'une quelconque des séries σ_p convergera.

Nous avons ici des fonctions d'une infinité de variables dont les dérivées partielles sont bien déterminées,

$$z_p^{q+1} = K_p + f_p(z_n^q) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ayant $\beta_{pnn'} = \beta_{pn'n}$, ce qui double le coefficient du terme rectangle $(z_n z_{n'})$, tandis que le coefficient du carré (z_n^2) reste unique; nous

avons pour la dérivée l'expression (3) :

$$\frac{\partial f_p}{\partial z_n} = -2\lambda x_{pn} + 2\lambda^2 \sum_i \beta_{pni} z_i \tag{3}$$

(l'indice supérieur des z est ici inutile).

Le module de cette dérivée reste moindre que

$$T_{pn} = 2\lambda \frac{HM}{\lfloor p} \frac{1}{n+1} + 2\lambda^2 \frac{HL}{\lfloor p} \sum_i \frac{1}{n+i+1} \frac{1}{\lfloor i} = \frac{1}{\lfloor p} \frac{\lambda}{n+1} (c + \lambda c').$$

Or le théorème des accroissements finis s'étend sans peine à la fonction f_p, d'où

$$\Delta_p^q < \sum_n \Delta_n^{q-1} T_{pn}. \tag{4}$$

La question serait achevée si nous avions un nombre fini de z_p. Mais ici la série

$$\sum_n T_{pn}$$

ne converge pas.

Il faut alors observer que l'on a

$$T_{2n} = \frac{1}{\lfloor 2} T_{1n}, \qquad T_{3n} = \frac{1}{\lfloor 3} T_{1n}, \qquad \ldots \tag{5}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_1^q - z_1^{q-1}| < \sum_n |z_n^q - z_n^{q-1}| T_{1n}, \\ |z_2^q - z_2^{q-1}| < \sum_n |z_n^q - z_n^{q-1}| T_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{6}$$

Donc Δ^{q-1}, limite supérieure des Δ_i^{q-1}, peut être pris égal à Δ_1^{q-1} et nous pouvons écrire

$$\Delta_i^{q-1} \leqq \frac{\Delta_1^{q-1}}{\lfloor i}. \tag{7}$$

L'inégalité (4) devient

$$\Delta_p^q < \Delta_1^{q-1} \left\{ T_{p1} + \frac{T_{p2}}{\lfloor 2} + \frac{T_{p3}}{\lfloor 3} + \ldots \right\}.$$

Il suffit, alors, d'exprimer la convergence de la série

$$(2') \qquad \sum_q \Delta_1^q,$$

c'est-à-dire, ici μ étant moindre que *un*, d'écrire

$$\Delta_1^q < \mu \Delta_1^{q-1}$$

ou encore

$$\lambda(c + \lambda c')\left(\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots\right) < 1,$$

$$\lambda \leqq \lambda_2.$$

5. *Troisième question.* — Nous avons obtenu une solution

$$z_p = \lim_{q=\infty} z_p^q = z_p^\infty,$$

$$(1) \qquad |z_p| < \frac{L}{\lfloor p}.$$

Peut-on avoir une autre solution u_p? La réponse *est négative* si l'on a

$$|u_p| < \frac{N}{\lfloor p}.$$

Écrivons, en effet,

$$u_p = K_p + f_p(u_n),$$
$$z^{q-1} = K_p + f_p(z_n^q).$$

Nous avons l'inégalité analogue de (4) (n° 4),

$$|u_p - z_p^{q+1}| < \sum_n |u_n - z_n^q| T'_{pn};$$

T'_{pn} est l'analogue de T_{pn}, formé avec le plus grand des nombres L, N.

Nous avons encore ici l'égalité analogue de (5) (n° 4),

$$T'_{1n} = \frac{1}{\lfloor p} T'_{1n}.$$

Désignons donc une limite supérieure de

$$|u_1 - z_1^q|$$

par le symbole

$$|u_1 - z_1^q|_M.$$

Nous aurons l'inégalité analogue de (7) (n° 4) :

$$|u_2 - z_2^q|_M = \frac{1}{\lfloor 2}|u_1 - z_1^q|_M,$$

$$|u_3 - z_3^q|_M = \frac{1}{\lfloor 3}|u_1 - z_1^q|_M,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

D'où

$$|u_1 - z_1^{q+1}|_M < |u_1 - z_1^q|_M \left(T'_{11} + \frac{T'_{12}}{\lfloor 2} + \frac{T'_{13}}{\lfloor 3} + \dots\right).$$

Donc, pour $\lambda \leqq \lambda_3$, nous avons

$$|u_1 - z_1^{q+1}|_M < \mu_1 |u_1 - z_1^q|_M,$$

μ_1 étant moindre que 1. D'où

$$u_1 - z_1^\infty \equiv u_1 - z_1 = 0,$$
$$u_p - z_p = 0.$$

Ce résultat paraît très particulier, mais il se généralise aussitôt. Par exemple, supposons que les u_n donnent lieu aux inégalités

$$|u_p| < \frac{N}{(1+a)^p}, \qquad a > 0,$$

de sorte que la convergence de la solution soit ici assurée pour des valeurs assez petites de x, tandis que précédemment $\sum u_n x^n$ convergeait quel que soit x.

La fonction $\lfloor x$ croît infiniment plus vite que $(1+a)^x$, de sorte que l'inégalité (1) du n° 5 peut être remplacée par

$$(1') \qquad |z_p| < \frac{L'}{(1+a)^p}.$$

Nous sommes ramenés au cas précédent, puisque les *majorantes* choisies pour les u et les z ont *même mode de convergence*.

D'où $u_p = z_p$ lorsque λ est assez petit.

En général, on prouvera l'unicité de la solution, λ étant assez petit, en considérant le mode de convergence *le plus désavantageux* des suites z_p et u_p, et en ramenant les deux modes de convergence à celui-là.

6. Nous pouvons traiter de même l'équation (3) de l'introduction, liée à l'équation célèbre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda e^u,$$

avec un noyau de M. Goursat : $\sum g_p(x)\, h_p(y)$. Annulons le coefficient de $g_p(x)$, après avoir porté dans l'intégrale la valeur

$$f(y) = G(y) - \lambda \sum z_n g_n(y).$$

Nous obtenons le système

$$(S) \qquad z_p = \int_0^1 h_p(y)\, e^{G(y) - \lambda \sum z_n g_n(y)}\, dy.$$

Pour $\lambda = 0$, nous avons la solution

$$z_p^0 = \int_0^1 h_p(y)\, e^{G(y)}\, dy = K_p,$$

et nous écrivons, de proche en proche,

$$z_p^{q+1} = \int_0^1 h_p(y)\, e^{G(y) - \lambda \sum z_n^q g_n(y)}\, dy.$$

Si nous prenons encore

$$g_p(x) = x^p, \qquad |e^{G(y)}| < M, \qquad h_p(y)| < \frac{H}{\lfloor p},$$

nous sommes ramenés aux trois questions du cas précédent.

Partons des inégalités

$$|z_p^0| < \frac{HM}{\lfloor p}.$$

Soit U un nombre positif, soit $L = HM + U$; nous aurons pour $\lambda \leqq \lambda_1$

$$|z_p^q| < \frac{L}{\lfloor p}.$$

Puis nous écrirons

$$z_p^{q+1} - z_p^q = \int_0^1 h_p(y)\, e^{G(y)} \left\{ e^{-\lambda \sum z_n^q g_n(y)} - e^{-\lambda \sum z_n^{q-1} g_n(y)} \right\} dy.$$

Appliquons encore le théorème des accroissements finis, géné-

ralisé, à la fonction sous le signe; majorons de la même façon : nous retrouvons nos systèmes d'inégalités; cela conduit à prendre $\lambda \leqq \lambda_2$ pour assurer la convergence de la série

$$\sum_q (z_p^{q+1} - z_p^q),$$

et à prendre $\lambda \leqq \lambda_3$ pour assurer l'unicité de la solution dans des conditions très larges.

7. En résumé, pour *l'équation intégrale non linéaire,* la fonction inconnue entrant sous le signe somme sous forme transcendante, ou sous forme de polynome, on peut former une solution, pour des valeurs de λ *assez petites.*

Des noyaux de forme très générale peuvent être mis sous la forme de noyaux de M. Goursat [1].

La majorante de notre noyau était

$$\mathrm{H} \sum \frac{x^n}{\lfloor n} \qquad (x \text{ quelconque});$$

nous obtenons une solution ayant le même mode de convergence. Nous aurions pu, aussi bien, prendre pour type de majorante

$$\mathrm{H} \sum x^n q^n$$

$$[g_p(x) = x^p, \qquad |h_p(y)| < \mathrm{H} q^n, \qquad |xq| < 1].$$

Quel que soit le mode de convergence, la théorie est la même. Nous pourrions, aussi, généraliser beaucoup cette théorie des *systèmes implicites infinis* et l'étendre aux systèmes d'*équations différentielles en nombre infini.*

Faisons encore une remarque sur l'équation (1) du n° 2, dans le cas où *il n'y a pas de second membre.*

$G(x)$ étant identiquement nul, le système (S) aura ici la forme

$$(\mathrm{S}') \qquad z_p = \lambda^2 \sum_1^\infty \sum_1^\infty \beta_{pnn'} z_n z_{n'}.$$

---

[1] On consultera, sur cette question, la belle *Dissertation* de M. E. Schmidt (*Math. Annalen,* t. LXIII).

Nous avons une solution évidente qui est

$$0 \equiv z_1 = z_2 = z_3 = \ldots.$$

Il semble qu'il y ait d'autres solutions *finies,* car l'on pourrait avoir des approximations convergeant, le point de départ z_p^0 étant arbitraire, tel seulement que l'on ait, par exemple,

$$|z_p^0| < \frac{A}{\lfloor p},$$

A étant un nombre positif donné.

Ceci est illusoire; on montre facilement que deux solutions finies sont identiques. Or nous avons la solution *zéro;* donc c'est *la seule,* lorsque λ est assez petit.

Nous voyons quelles difficultés énormes entraîne le cas non linéaire : nous sommes en présence de fonctions multiformes fort peu accessibles [1].... Par les moyens élémentaires ici employés, nous arriverons à suivre une solution depuis le point $\lambda = 0$ jusqu'au point $\lambda = l$, le plus voisin de l'origine, où s'annule le *jacobien* du système de fonctions implicites.

J'aurai bientôt à revenir sur ces questions.

---

[1] Pendant que j'écrivais ces pages, M. E. Schmidt a publié une Note sur ces questions (*Mathematische Annalen,* t. LXV). Le point de vue paraît, au premier abord, tout différent du mien. On sait, d'ailleurs, combien M. E. Schmidt est compétent dans cet ordre d'idées.

Nous devons rappeler les principaux travaux relatifs aux équations intégrales linéaires à limites d'intégration constantes :

I. Fredholm, *Acad. de Stockholm,* 1900, et *Acta mathematica,* t. XXVII. — D. Hilbert, *Nachrichten zu Göttingen,* 1904 à 1906. — Erhard Schmidt, *Mathematische Annalen,* t. LXIII, LXIV. — E. Picard, *Circolo di Palermo* et *Ann. Éc. Norm.,* 1906. — MM. Goursat et Lebesgue, *Bull. de la Soc. math. de France,* 1907 et 1908. — *Thèse* de M. Bryon-Heywood, 1908. — Dissertations inaugurales (*Göttingen*) de Mme Lebedeff, de MM. Kellogg, Weyl, Hilb, Hellinger, Andrae.

Citons aussi MM. Mason, Riesz, Bateman.

Les résultats fondamentaux de M. Fredholm sont exposés dans un Livre de l'auteur (sous presse), *Exercices et leçons d'Analyse* (Gauthier-Villars).

Pour les *applications,* nous devons citer surtout : J. Plemelj, *Monatshefte für Mathem. u. Physik,* t. XV et XVIII. — G. Lauricella, *Annali di Matematica,* 3e série, t. XIV, et *R. Acc. dei Lincei,* 1906 et 1907. — *Voir* aussi l'article de M. Pincherle dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.*

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Rothrock, présenté par MM. Picard et Hancock; M. J.-B. Shaw, présenté par MM. Servant et Hedrick.

Communications :

M. Blutel : *Sur l'intégration d'une certaine équation de Riccati.*

M. Raffy : *Sur les surfaces à lignes de courbure confondues.*

SÉANCE DU 12 FÉVRIER 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Lalesco : *Sur les solutions périodiques de l'équation hyperbolique du second ordre.*

M. Fatou : *Application de l'analyse arithmétique du continu à l'étude de certaines équations fonctionnelles.*

M. Montel : *Sur une courbe qui remplit l'espace à une infinité de dimensions.*

SÉANCE DU 26 FÉVRIER 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. de Richard d'Aboncourt, présenté par MM. Boulanger et Clairin.

Communications :

M. Chazy : *Sur un problème d'Arithmétique.*

M. P. Lévy : *Observation sur la Communication précédente.*

M. Raffy : *Sur les surfaces à lignes de courbure confondues et sur certains réseaux conjugués persistants.*

SÉANCE DU 11 MARS 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Popovici : *Sur les congruences de courbes planes.*

M. P. Lévy : *Sur une courbe sans tangente.*

MM. Perrin, Lecornu, Fouché et Fatou présentent diverses observations à propos de cette Communication.

SÉANCE DU 25 MARS 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur les diverses notations vectorielles.*

MM. Laisant et Andoyer présentent des observations à propos de cette Communication.

M. Andoyer : *Sur une classe de fractions continues.*

SÉANCE DU 8 AVRIL 1908.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communication :

M. Raffy : *Sur les réseaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima.*

SÉANCE DU 29 AVRIL 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Marcus : *Sur le rapport anharmonique des tangentes menées à une cubique par un de ses points.*

M. R. Perrin : *Sur certaines expressions différentielles qui se déduisent des invariants et covariants des formes binaires.*

SÉANCE DU 13 MAI 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Fouché : *Sur certains théorèmes de géométrie projective.*

M. Raffy : *Sur quelques éléments isotropes.*

M. Perrin présente quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU 27 MAI 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Arthur Lynch, présenté par MM. R. Perrin et Laisant.

Communications :

M. Bricard : *Sur un théorème de M. Darboux.*

M. Hadamard : *Sur l'indice de Kronecker et l'instabilité de l'équilibre.*

SÉANCE DU 10 JUIN 1908.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Raffy : *Sur les développées des courbes appartenant à un plan isotrope.*

M. Fouché : *Observations sur les définitions géométriques.*

M. R. Perrin : *Sur un mode de représentation des éléments imaginaires en Géométrie.*

SÉANCE DU 24 JUIN 1908.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Popovici : *Sur les points d'équilibre d'un fluide en mouvement.*

M. Bioche : *Sur des cas particuliers du jacobien des systèmes de quadriques.*

M. Fouché présente quelques observations au sujet de cette Communication.

SÉANCE DU 8 JUILLET 1908.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines classes de surfaces algébriques dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques.*

M. Bioche : *Sur les surfaces algébriques qui admettent comme asymptotique une courbe algébrique donnée.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE WEIERSTRASS;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Le théorème dont il s'agit, qui est aujourd'hui classique, s'énonce ainsi : *Si* $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$ *est une série entière en* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, *convergente tant que les modules des variables restent plus petits que des nombres positifs* $r_1, r_2, \ldots, r_p, \rho$, *et si le développement de* $F(0, 0, \ldots, 0, y)$ *commence par un terme de degré* n *en* y $(n > 0)$, *on a identiquement*

$$(1)\quad \begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) \\ \quad = (y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n)\,\Phi(x_1, \ldots, x_p, y), \end{cases}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ *étant des séries entières en* $x_1, \ldots, x_p$, *qui s'annulent pour* $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, *et* Φ *une série entière en* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, *avec un terme constant différent de zéro.*

On trouve la démonstration de ce théorème, que Weierstrass donnait dans son enseignement depuis 1860, dans le Tome II des *Mathematische Werke von Karl Weierstrass* (p. 135). On peut aussi le déduire des théorèmes généraux de Cauchy [1]. Ces deux démonstrations font appel à des notions assez élevées de la théorie des fonctions analytiques, tandis que le théorème est en lui-même d'une nature élémentaire. La démonstration ci-dessous ne s'appuie que sur les propriétés les plus simples des séries entières.

2. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* $F(y)$ *une série entière*

$$(1)\qquad F(y) = A_0 + A_1 y + \ldots + A_n y^n + \ldots$$

[1] *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, 2e édition, p. 263) ou le Tome II de mon *Cours d'Analyse* (p. 284).

dont les coefficients sont des nombres réels et positifs, et qui est convergente pourvu qu'on ait $|y| \leqq \rho$, *le nombre* ρ *étant lui-même positif.*

Imaginons qu'on remplace dans cette série $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ *par les polynomes de degré* $(n-1)$ *en* y *qu'on déduit de la relation*

$$(2) \qquad y^n = \mu_0 + \mu_1 y + \ldots + \mu_{n-1} y^{n-1},$$

où $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ *sont des paramètres. Le résultat de la substitution est un polynome de degré* $n-1$ *en* y, *dont les coefficients sont des séries entières en* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ *qui ont des rayons de convergence différents de zéro.*

De l'équation (2) on déduit, en effet,

$$(3) \qquad y^{n+p} = \mu_0 y^p + \mu_1 y^{p+1} + \ldots + \mu_{n-1} y^{n+p-1};$$

si l'on pose pour un moment $y^m = u_m$, on a une relation de récurrence

$$(4) \qquad u_{n+p} = \mu_0 u_p + \mu_1 u_{p+1} + \ldots + \mu_{n-1} u_{n+p-1} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots)$$

permettant d'exprimer $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}, \ldots$ au moyen de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. Soit

$$(5) \qquad u_{n+p} = \varphi_0^p u_0 + \varphi_1^p u_1 + \ldots + \varphi_{n-1}^p u_{n-1}$$

la formule qui donne u_{n+p} en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; il est clair que $\varphi_0^p, \varphi_1^p, \ldots, \varphi_{n-1}^p$ sont des polynomes en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ dont tous les coefficients sont des nombres entiers positifs.

Il suffit de remplacer dans cette relation u_i par y^i pour avoir l'expression générale de y^{n+p} au moyen de $y, y^2, \ldots, y^{n-1}$:

$$(6) \qquad y^{n+p} = \varphi_0^p + \varphi_1^p y + \ldots + \varphi_{n-1}^p y^{n-1}.$$

En remplaçant $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ par leurs expressions dans la série donnée $F(y)$, on obtient un polynome de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients sont des séries entières par rapport aux paramètres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, tous les coefficients de ces séries étant des nombres positifs. Pour prouver que ces séries ont des rayons de convergence non nuls, il suffit de montrer qu'elles sont con-

vergentes quand on prend pour $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des valeurs positives inférieures à un nombre positif r convenablement choisi.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines supposées distinctes de l'équation

$$(7) \qquad r^n = \mu_0 + \mu_1 r + \ldots + \mu_{n-1} r^{n-1};$$

la solution générale de la relation de récurrence (4) est, comme il est bien connu,

$$u_m = C_1(r_1)^m + C_2(r_2)^m + \ldots + C_n(r_n)^m,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des coefficients arbitraires. Pour en déduire l'expression générale de y^m en fonction de $y^0, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$, il suffira de choisir les n coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de façon qu'on ait

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = y, \qquad u_2 = y^2, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = y^{n-1},$$

et l'on obtient finalement

$$y^m = P_1(y) r_1^m + P_2(y) r_2^m + \ldots + P_n(y) r_n^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$P_1(y), P_2(y), \ldots, P_n(y)$ étant des polynomes de degré $(n-1)$ à coefficients constants. En remplaçant toutes les puissances de y par les expressions correspondantes dans la série $F(y)$, le résultat de cette substitution est un polynome de degré $(n-1)$

$$F(r_1) P_1(y) + F(r_2) P_2(y) + \ldots + F(r_n) P_n(y).$$

Les coefficients de ce polynome seront représentés par des séries convergentes, pourvu que $|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_n|$ soient inférieurs à ρ. Or, lorsque les paramètres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ tendent vers zéro, les n racines de l'équation (7) tendent aussi vers zéro. Soit r un nombre positif tel que les modules des n racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ soient inférieurs à ρ lorsque les modules de $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont plus petits que r. Si l'on prend pour $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des nombres positifs inférieurs à r, on voit que les séries entières en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, qu'on obtient par la substitution précédente dans la série (1), seront convergentes. C. Q. F. D.

Si l'équation (7) avait une racine multiple r_1, dans l'expression générale de y^m, il entrerait des termes en $m r_1^m, m^2 r_1^m, \ldots$, mais la conclusion ne serait pas modifiée.

Il est possible de généraliser ce résultat. Considérons une série entière à $p+1$ variables $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$, admettant des rayons de convergence différents de zéro. Si l'on effectue les mêmes substitutions que dans le cas particulier précédent, on obtient encore un polynome de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, et tous les coefficients de ces séries se déduisent par des additions et des multiplications seulement des coefficients de la série $F(x_1, \ldots, x_p, y)$.

Pour démontrer leur convergence, on peut donc remplacer cette série F par une série majorante telle que

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_p}{a_p}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}.$$

Or, si l'on effectue dans cette série auxiliaire les mêmes substitutions, le coefficient de y^{n-i} dans le résultat est égal au produit du facteur

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x_p}{a_p}\right)}$$

par le coefficient de y^{n-i} dans le polynome obtenu en effectuant ces substitutions dans la série

$$\frac{1}{1-\frac{y}{\rho}} = 1 + \frac{y}{\rho} + \ldots + \frac{y^n}{\rho^n} + \ldots.$$

La substitution est donc légitime, quelle que soit la série entière $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$, pourvu qu'elle ait des rayons de convergence différents de zéro, et que les modules de $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ soient suffisamment petits.

Si $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont remplacés par des séries entières en $y_1, y_2, \ldots, y_q$, s'annulant pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_q = 0$, et admettant des rayons de convergence non nuls, on sait, d'après les propriétés générales des séries entières, qu'on pourra aussi ordonner le résultat suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q$. On peut d'ailleurs supposer que quelques-unes des variables y_i sont comprises parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

3. Considérons maintenant l'équation

$$(8)\quad y^n = \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_p) + y\varphi_1 + \ldots + y^n\varphi_n + y^{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots,$$

dont le second membre est une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, admettant des rayons de convergence différents de zéro, qu'on écrit en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de y. On suppose, de plus, que les $(n+1)$ fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont nulles pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$. Dans ces conditions, cherchons à déterminer n coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, tels qu'en posant

$$(9)\qquad y^n = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1},$$

puis en remplaçant $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ par leurs expressions au moyen de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, y, \ldots, y^{n-1}$ déduites de la relation (9), dans les deux membres de l'équation (8), on obtienne deux polynomes de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients soient identiques.

De la relation (9) on déduit successivement

$$\begin{aligned}
y^{n+1} &= u_0 y + u_1 y^2 + \ldots + u_{n-2} y^{n-1} + \ldots,\\
y^{n+2} &= u_0 y^2 + u_1 y^3 + \ldots + u_{n-3} y^{n-1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y^{2n-1} &= u_0 y^{n-1} + \ldots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; quant à $y^{2n}, y^{2n+1}, \ldots$, ils s'expriment par des polynomes dont les coefficients sont au moins du second degré par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. En substituant dans les deux membres de l'équation (9), on a, pour déterminer $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, les n équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
u_0 &= \varphi_0 + u_0\varphi_n + \ldots,\\
u_1 &= \varphi_1 + u_1\varphi_n + u_0\varphi_{n+1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_{n-1} &= \varphi_{n-1} + u_{n-1}\varphi_n + u_{n-2}\varphi_{n+1} + \ldots + u_0\varphi_{2n-1} + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits étant des séries entières en $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, dont tous les termes sont au moins du second degré en $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. A ce système (10) on peut appliquer le théorème

général sur les fonctions implicites [1]. Pour $x_1 = \ldots = x_p = 0$, ce système admet les solutions $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$, et la valeur correspondante du déterminant fonctionnel est égale à l'unité. On en déduira donc pour $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ des séries entières ordonnées suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, et satisfaisant *formellement* aux équations (10).

Ces séries sont convergentes pourvu que les modules des variables x_i soient plus petits qu'un nombre positif ρ choisi convenablement. En effet, il résulte des lemmes précédents que les seconds membres des équations (10) sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, qui admettent des rayons de convergence différents de zéro. Il en sera donc de même, d'après le théorème général sur les fonctions implicites, des séries entières $u_0(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, obtenues par la résolution formelle des équations (10).

La démonstration du théorème de Weierstrass est maintenant bien facile. Soit

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = 0 \tag{11}$$

une équation dont le premier membre est une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, avec des rayons de convergence différents de zéro, telle qu'on ait

$$F(0, 0, \ldots, 0, y) = A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots,$$

le coefficient A_n *étant différent de zéro.* En divisant par ce coefficient, l'équation (11) peut se mettre sous la forme (8), ou, ce qui revient au même, on peut écrire

$$F(x_1, \ldots, x_p, y) = y^n - \varphi_0 - \varphi_1 y - \ldots - \varphi_n y^n - \varphi_{n+1} y^{n+1} \ldots. \tag{12}$$

Ayant déterminé les séries $u_0(x_1, \ldots, x_p), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_p)$ comme il vient d'être expliqué, posons

$$y^n = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1} + v, \tag{13}$$

v étant une variable auxiliaire, et remplaçons, dans F, y^n, y^{n+1},

---

[1] *Voir*, par exemple, le Tome I de mon *Cours d'Analyse* (p. 450).

$y^{n+2}, \ldots$ par leurs expressions déduites de la relation (13). Le résultat de cette substitution est un polynome de degré $n-1$ en y, dont les coefficients sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p, v$, admettant des rayons de convergence non nuls,

$$Q_0(x_1, \ldots, x_p, v) + Q_1 y + \ldots + Q_{n-1} y^{n-1}.$$

D'après la façon dont on a déterminé $u_0, \ldots, u_{n-1}$, toutes ces séries s'annulent pour $v = 0$, quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On peut donc encore écrire le résultat de cette substitution

$$v\,R(x_1, x_2, \ldots, x_p, v),$$

R étant une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, v$ dont les coefficients sont des polynomes en y de degré $n-1$ au plus. Si l'on remplace, dans vR, v par $y^n - u_0 - u_1 y - \ldots - u_{n-1} y^{n-1}$, cela revient à faire la substitution inverse de celle qui conduit de F à vR. On retombera donc sur la fonction F elle-même; mais $R(x_1, x_2, \ldots, x_p, v)$ se change en une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$. Par suite, on a identiquement

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) \\ &\quad = (y^n - u_0 - u_1 y - \ldots - u_{n-1} y^{n-1})\, S(x_1, x_2, \ldots, x_p, y), \end{aligned}$$

S désignant une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, avec des rayons de convergence différents de zéro. Le coefficient de y^n dans $F(0, 0, \ldots, 0, y)$ étant égal à 1, il est clair que le terme constant dans S est égal aussi à l'unité.

La démonstration précédente montre comment l'on doit calculer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ du polynome de degré n en y qui figure dans l'identité (I). On les obtient par la résolution d'un système de n équations simultanées de la forme (10); ces équations permettent de calculer de proche en proche autant de termes qu'on voudra des développements en séries de ces fonctions.

SUR LES INTÉGRALES PASSANT PAR UN POINT SINGULIER D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. HENRI DULAC.

1. *Résumé et introduction.* — Si, étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \qquad Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx = 0,$$

où X et Y sont des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, nous posons

$$y = tx^{\nu},$$

ν étant un exposant positif rationnel ou irrationnel, nous obtenons en général [1] l'équation

$$(2) \qquad x(at^{q-1} + \ldots)\,dt + (bt^{q} + \ldots)\,dx = 0,$$

où les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$; a et b sont deux constantes dont l'une peut être nulle; q est un entier positif. Nous obtenons *toujours* une équation de cette forme dans le cas, que nous voulons examiner particulièrement, où ν *est un nombre irrationnel.* Considérant les intégrales $y(x)$ de l'équation (1) et supposant que x tende vers zéro, en variant dans le champ complexe, je démontre les deux théorèmes suivants :

I. *Si, comme cela a lieu en général, on a $b \neq 0$ et si t tend vers une limite, cette limite est nulle ou infinie.*

II. *Si l'on a $b = 0$, t tend nécessairement vers une limite lorsque x tend vers zéro.*

J'emploierai pour la démonstration de ces théorèmes deux formes de l'intégrale générale de (2) qui pourraient être utiles dans d'autres cas.

Les deux théorèmes énoncés sont des conséquences immédiates des théorèmes généraux relatifs aux équations différentielles,

---

[1] Il en est toujours ainsi lorsque ν n'est la pente d'aucun côté du polygone figuratif.

lorsque ν *est un nombre entier*. Le premier résulte de ce que l'équation (2) n'a pas d'autre intégrale que $x = 0$, répondant aux conditions initiales $x = 0$, $t = t_0$, t_0 n'étant ni nul ni infini. Le second théorème résulte du théorème de M. Painlevé. Ces démonstrations s'étendent au cas où ν est rationnel $\left(\nu = \frac{p}{q}\right)$; en remplaçant x par x^q, on est ramené au cas de ν entier. Certaines des démonstrations qu'on peut donner du théorème I, dans le cas où ν est entier, s'étendent au cas où ν est irrationnel, mais les démonstrations données du théorème de M. Painlevé ne permettent pas de démontrer le théorème II.

Le théorème I a été fréquemment employé dans la recherche des intégrales passant par le point singulier $x = 0$, $y = 0$, sans qu'on se soit, me semble-t-il, beaucoup demandé si l'on en possédait une démonstration rigoureuse valable dans tous les cas.

Nous considérerons *exclusivement* dans nos démonstrations le cas où ν est irrationnel. On verra facilement les simplifications qu'elles comporteraient si ν était rationnel.

2. *Forme de l'équation différentielle* (2). — L'équation (1) peut s'écrire

$$dy\,\Sigma A_{pq} x^{p+1} y^{q-1} + dx\,\Sigma B_{pq} x^p y^q = 0. \tag{3}$$

Les deux Σ s'étendent à toutes les valeurs que prennent dans l'équation (1) les exposants p et q. Par hypothèse on a

$$p \geqq -1, \qquad q \geqq 0.$$

Après le changement de variable $y = tx^\nu$, l'équation devient

$$x\,dt\,\Sigma A_{pq} x^{p+q\nu} t^{q-1} + dx\,\Sigma(\nu A_{pq} + B_{pq}) x^{p+q\nu} t^q = 0.$$

Considérons les termes où l'exposant $p + q\nu$ prend la plus petite valeur et soit $p' + q'\nu$ cette valeur minimum. Divisons les deux membres de l'équation par $x^{p'+q'\nu}$. Nous avons l'équation

$$x\,dt\,\Sigma A_{pq} x^{p-p'+(q-q')\nu} t^{q-1} + dx\,\Sigma(\nu A_{pq} + B_{pq}) x^{p-p'+(q-q')\nu} t^q = 0. \tag{4}$$

Soit h un entier positif que nous fixerons plus loin et désignons par $\frac{n+1}{h}$ et $\frac{n}{h}$ les valeurs approchées de ν à $\frac{1}{h}$ près. Posons

$$u = x^{\frac{n+1}{h} - \nu}, \qquad v = x^{\nu - \frac{n}{h}}.$$

Je vais montrer qu'en prenant h assez grand, on pourra remplacer toutes les puissances irrationnelles de x, qui entrent dans (5), par des termes de la forme $u^\alpha v^\beta$, α et β étant des entiers positifs.

Les divers exposants de x dans (5) sont tous positifs et de l'un des trois types suivants, où P et Q sont des entiers positifs :

1° $\quad P + Q\nu,$

2° $\quad P - Q\nu,$

3° $\quad Q\nu - P.$

Dans le cas 1° nous devons, pour toutes les valeurs possibles de P et Q, trouver des entiers positifs α et β tels qu'on ait

$$u^\alpha v^\beta = x^{P+Q\nu},$$

ou encore

$$\alpha\left(\frac{n+1}{h} - \nu\right) + \beta\left(\nu - \frac{n}{h}\right) = P + Q\nu.$$

Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$\beta = \alpha + Q, \qquad \alpha(n+1) - \beta n = hP,$$

d'où

$$\alpha = hP + nQ;$$

α et par suite β sont donc bien des entiers positifs.

Dans le cas 2° nous avons de même

$$\alpha = \beta + Q, \qquad \beta = hP - (n+1)Q.$$

En posant

$$\frac{n+1}{h} = \nu + \frac{\varepsilon}{h},$$

on a $\varepsilon < 1$ et l'on peut écrire

$$(5) \qquad \beta = h(P - Q\nu) - \varepsilon Q.$$

Remarquons qu'on a $Q = q' - q$ et par conséquent $Q \leqq q'$, q' étant le nombre fixe dont il a été question. Il en résulte que, pour toutes les valeurs que peuvent prendre ici P et Q, la différence $P - Q\nu$, qui est positive, est supérieure à un nombre fixe facile à déterminer lorsque ν est donné. D'autre part εQ est inférieur à q'; on peut donc prendre h assez grand pour que β, qui est un entier, soit positif en vertu de (5). Il en sera de même de α.

Dans le cas 3° on aura

$$\beta = \alpha + Q, \qquad \alpha = nQ - hP.$$

Comme on a

$$P = p' - p,$$

on aura

$$P \leqq p' + 1.$$

Désignons par r une de ces valeurs $0, 1, 2, \ldots, p'+1$ que prend P ($P = r$). Pour chacune de ces valeurs r, déterminons un entier Q_r tel qu'on ait

$$\nu Q_r - r > 0.$$

Posons maintenant

$$\frac{n}{h} = \nu - \frac{\varepsilon'}{h}, \qquad Q = Q_r + Q',$$

Q_r étant l'entier qui correspond à la valeur $P = r$ qui entre dans $nQ - hP$. Nous aurons

$$\alpha = nQ' + h(\nu Q_r - r) - \varepsilon' Q_r;$$

$\nu Q_r - r$ reste supérieur à un nombre positif, tandis que $\varepsilon' Q_r$ reste inférieur à un autre nombre positif. On peut donc prendre h assez grand pour que l'expression $h(\nu Q_r - r) - \varepsilon' Q_r$ soit toujours positive; α est donc un entier positif et il en est de même de β. En prenant h assez grand pour satisfaire aux conditions rencontrées, les puissances irrationnelles de x seront remplacées par des termes de la forme $u^\alpha v^\beta$ (¹). Nous pouvons donc écrire l'équation (5) sous la forme

$$x\,dt\,\Sigma A_{pq} u^\alpha v^\beta t^{q-1} + dx\,\Sigma(\nu A_{pq} + B_{pq}) u^\alpha v^\beta t^q = 0.$$

Les termes de (4) où l'exposant de x est nul sont ceux où l'on a

$$p = p', \qquad q = q'.$$

(¹) Le théorème que nous venons de démontrer peut encore être énoncé ainsi :

Étant données des expressions $r\rho + n\nu$ qui sont toutes positives, *où ρ et ν sont deux nombres dont le rapport est irrationnel, tandis que r et n sont des entiers positifs ou négatifs, on peut toujours déterminer deux nombres irrationnels λ et μ et faire correspondre à chaque système des valeurs r et n des entiers* positifs *l et n tels qu'on ait $r\rho + n\nu = l\lambda + m\mu$.*

Il doit donc y avoir un seul terme de cette espèce dans le coefficient de dt et un seul dans le coefficient de dx. Soient $at^{q'-1}$ et $bt^{q'}$ ces deux termes. Une des quantités a ou b peut être nulle, mais elles ne peuvent pas être nulles toutes les deux [1]. Nous pouvons écrire l'équation (4) sous la forme

$$(6)\quad x\,dt(at^{q'-1}+\Sigma A_{pq}u^{\alpha}v^{\beta}t^{q-1})+dx[bt^{q'}+\Sigma(\nu A_{pq}+B_{pq})u^{\alpha}v^{\beta}t^{q}]=0;$$

dans chacun des Σ considérés les exposants α et β ne peuvent être nuls tous les deux à la fois.

3. Théorème I. — *Lorsque x tend vers zéro et qu'on n'a pas $b=0$, le rapport $y:x^{\nu}$ ou bien ne tend vers aucune limite* [2] *ou bien tend vers l'infini ou vers zéro.*

Montrons qu'il existe une fonction $f(u, v, t)$ holomorphe pour u et v voisins de zéro et t voisin d'une valeur t_0, la fonction f étant telle que

$$f(u, v, t)=\text{const.}$$

donne l'intégrale générale de (6) dans le voisinage de $x=0$ et $t=t_0$. Nous posons pour abréger

$$u=x^{\lambda},\qquad v=x^{\mu},$$

et nous supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $\lambda<\mu$. Il faut qu'on ait

$$\left(\lambda u\frac{\partial f}{\partial u}+\mu v\frac{\partial f}{\partial v}\right)(at^{q'-1}+\Sigma A_{pq}u^{\alpha}v^{\beta}t^{q-1})$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}[bt^{q'}+\Sigma(\nu A_{pq}+B_{pq})u^{\alpha}v^{\beta}t^{q}].$$

---

(1) En effet, on a

$$a=A_{p'q'},\qquad b=\nu A_{p'q'}+B_{p'q'}$$

et une des quantités $A_{p'q'}$, $B_{p'q'}$ est différente de zéro.

(2) t peut ne tendre vers aucune limite. Les circonstances que j'ai signalées (*Comptes rendus*, 25 novembre 1907) et qui se présentent pour le rapport $y:x$, rapport qui dans la plupart des cas ne tend vers aucune limite, lorsque x tend vers zéro suivant un chemin convenablement choisi, se présentent encore pour le rapport $y:x^{\nu}$. Les résultats que j'ai obtenus dans l'étude du rapport $y:x$, et qui sont développés dans un Mémoire qui doit paraître dans les *Rendiconti del Circolo matematico*, s'étendent sans peine au rapport $y:x^{\nu}$.

Les coefficients des dérivées dans les deux membres sont des fonctions de u, v, t holomorphes pour $u = 0$, $v = 0$, $t = t_0$. De plus le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'est pas nul pour $u = 0$, $v = 0$, $t = t_0$, si l'on a $t_0 \neq 0$. L'équation aux dérivées partielles est donc vérifiée par une fonction $f(u, v, t)$ holomorphe pour les valeurs considérées et se réduisant à u pour $t = t_0$. En développant cette fonction suivant les puissances de $t - t_0$, les coefficients de ce développement seront des séries entières en u et v. Il en résulte qu'en mettant en facteur $u = x^\lambda$, l'intégrale générale de l'équation peut s'écrire

$$(7) \qquad x^\lambda[1 + (t - t_0)\varphi_1(x) + (t - t_0)^2\varphi_2(x) + \ldots] = C,$$

φ_1, φ_2, ... étant des fonctions de x qui sont nulles pour $x = 0$.

Ceci posé, il est impossible qu'il existe une intégrale telle que, lorsque x tend vers zéro, t tende vers une limite finie t_0, différente de zéro. En effet, cette intégrale vérifie la relation (7); comme le premier membre de (7) tend vers zéro avec x, on doit avoir $C = 0$; mais pour $C = 0$ la relation (7) ne peut être vérifiée par aucune fonction $t(x)$ tendant vers t_0 lorsque x tend vers zéro.

4. *Cas où l'on a $b = 0$.* — Je vais d'abord montrer que, quelle que soit la valeur t_0 choisie ($t_0 \neq 0$), il y a une intégrale telle que t tende vers t_0, lorsque x tend vers zéro d'une façon quelconque. Je vais faire voir que cette intégrale peut être représentée par une relation de la forme

$$t = \varphi(u, v),$$

φ étant une fonction de u et v holomorphe pour $u = 0$, $v = 0$. Puisqu'on a $b = 0$, on aura $a \neq 0$ et l'équation (6) peut s'écrire

$$x\frac{dt}{dx} = f(t, u, v).$$

Nous pouvons choisir arbitrairement un nombre ε aussi petit qu'on veut, et un nombre E aussi grand qu'on veut; il existera un nombre η tel que f soit une fonction holomorphe pour

$$(8) \qquad \varepsilon < t < E, \qquad |u| < \eta, \qquad |v| < \eta.$$

En posant

$$t = t_0 + z,$$

nous devons avoir

$$(9) \qquad \lambda u \frac{\partial z}{\partial u} + \mu v \frac{\partial z}{\partial v} = f(t_0 + z, u, v) \equiv f_1(z, u, v).$$

Si nous prenons

$$(10) \qquad \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < |t_0| < E - \frac{\varepsilon}{2},$$

f_1 sera une fonction holomorphe de z, u, v si l'on a

$$|z| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |u| < \eta, \qquad |v| < \eta.$$

Si M est le maximum du module de f lorsque t, u, v varient dans le champ défini par les inégalités (8), on pourra prendre comme fonction majorante de f_1 la fonction

$$\frac{M(u+v)}{\left(1 - \frac{2z}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{u}{\eta}\right)\left(1 - \frac{v}{\eta}\right)}.$$

Nous prendrons pour z un développement se réduisant à zéro pour $u = 0$, $v = 0$. On peut déterminer sans difficultés les termes successifs de ce développement vérifiant la relation (9). Ce développement est convergent; en effet, si l'on suppose comme précédemment $\lambda < \mu$, les termes de $z(u, v)$ sont inférieurs en valeur absolue aux termes de la fonction Z vérifiant la relation

$$\lambda Z = \frac{M(u+v)}{\left(1 - \frac{2z}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{u}{\eta}\right)\left(1 - \frac{v}{\eta}\right)}.$$

Il existe un nombre η', facile à calculer, tel que Z soit convergent pour $|u| < \eta'$, $|v| < \eta'$. Tous les termes de Z étant positifs, z sera convergent pour $|u| < \eta'$, $|v| < \eta'$. Les coefficients de ce développement z seront des fonctions holomorphes de t_0, si t_0 vérifie les conditions (10). Nous désignerons ce développement par $z(t_0, u, v)$ et nous aurons

$$(11) \qquad t = t_0 + z(t_0, u, v),$$

ce qui met en évidence l'intégrale $t(x)$ qui se réduit à t_0 pour $x = 0$ [1].

---

[1] Si nous considérons l'intégrale correspondante de (1), nous aurons

$$y = t_0 x^\nu + x^\nu z(t_0, u, v).$$

5. Théorème II. — Je vais conclure de ce qui précède que, *si l'on a* $b = 0$, t *tend nécessairement vers une limite lorsque* x *tend vers zéro.*

Considérons une intégrale $t(x)$ pour laquelle t ne tend ni vers zéro ni vers l'infini, lorsque x tend vers zéro. On peut trouver un nombre ε' tel que pour une valeur x_1, aussi petite qu'on veut en valeur absolue, t prenne une valeur t_1 vérifiant la condition

$$\varepsilon' < |t_1| < \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Désignons par u_1, v_1 les valeurs de u et v pour $x = x_1$, et, considérant la relation (11), montrons qu'il y a une valeur de t_0 et une seule vérifiant l'équation

$$t_0 - t_1 + z(t_0, u_1, v_1) = 0 \tag{12}$$

et satisfaisant aux conditions (10) que nous écrirons, pour plus de commodité,

$$\varepsilon_1 < |t_0| < E_1. \tag{13}$$

Si l'on considère dans le plan des t_0 l'aire renfermant tous les points t_0 vérifiant les relations (13), cette aire est limitée par les deux cercles ayant pour centres l'origine et pour rayons respectifs ε_1 et E_1. Nous désignerons ces cercles par (ε_1) et (E_1). Pour démontrer que l'équation (12) n'a qu'une racine comprise entre (ε_1) et (E_1), il suffit de montrer que, si l'affixe de t_0 parcourt (dans le sens direct par rapport à l'aire comprise entre les deux cercles) le double contour formé par les cercles (ε_1) et (E_1), la variation de l'argument du premier membre de (12) est égale à 2π. Lorsqu'on

---

On peut se demander si l'on ne peut pas obtenir une forme plus simple, en particulier un développement suivant les puissances de x et de $t_0 x^\nu$. Cette dernière simplification n'est pas possible en général. Si nous considérons en effet l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \nu x y + (1 - \nu) y^2,$$

avec $\nu < 1$, l'intégrale générale de cette équation est donnée par

$$y = \frac{C x^\nu}{1 + C x^{\nu - 1}},$$

et nous voyons que la simplification indiquée n'est pas possible.

parcourt le cercle (ε_1), la variation d'argument est nulle. En effet, $z(t_0, u, v)$ étant nul pour $u = 0$, $v = 0$, on peut prendre x_1 assez petit pour qu'on ait

$$|z(t_0, u_1, v_1)| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Nous pouvons supposer ε_1 aussi petit qu'on veut et supposer qu'on a $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon'}{2}$. Le premier membre de (12), pouvant s'écrire

$$-t_1\left[1 - \frac{t_0}{t_1} - \frac{z(t_0, u_1, v_1)}{t_1}\right],$$

aura une variation d'argument nulle lorsqu'on parcourt le cercle (ε_1).

Supposons maintenant que t_0 parcoure le cercle (E_1). Le premier membre de (12) peut s'écrire

$$t_0\left[1 - \frac{t_1}{t_0} + \frac{z(t_0, u_1, v_1)}{t_0}\right]. \tag{14}$$

On a

$$\left|\frac{t_1}{t_0}\right| < \frac{1}{\varepsilon' E_1};$$

on peut supposer $\varepsilon' E_1$ égal à 2, puisque E_1 peut être pris aussi grand qu'on veut. On peut également supposer qu'on a

$$\left|\frac{z(t_0, u_1, v_1)}{t_0}\right| < \frac{1}{2}.$$

La variation d'argument de (14) lorsqu'on parcourt le cercle E_1 sera donc égale à 2π. L'équation (12) a une racine t_0 vérifiant les conditions (13) et l'intégrale qui pour $x = x_1$ prend la valeur t_1 est confondue avec l'intégrale

$$t = t_0 + z(t_0, u, v).$$

Donc, si l'on a une intégrale pour laquelle t ne tende ni vers zéro ni vers l'infini, lorsque t_1 tend vers zéro, t tend vers une limite finie t_0.

SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les équations différentielles qui se présentent en Mécanique ou en Physique ne sont pas, en général, exactement intégrables; on doit donc, le plus souvent, substituer aux solutions exactes des solutions approchées.

C'est un problème très important (et néanmoins peu étudié) que celui de l'estimation des erreurs que comportent ces solutions approchées, c'est-à-dire la recherche des limites supérieures pour les valeurs absolues de ces erreurs, ces limites étant des fonctions positives de la variable indépendante. Il permet, en effet, de constater si les écarts entre les nombres prévus par le calcul et ceux donnés par les observations sont dus à l'approximation des procédés mathématiques ou à celle des lois physiques adoptées.

A un autre point de vue, l'estimation des erreurs sert de guide dans l'application de certains procédés d'intégration approchée en donnant un sens précis à la proposition intuitive : « Il suffit que deux systèmes différentiels soient assez voisins pour que leurs solutions soient aussi voisines qu'on le veut. »

J'ai cherché tout d'abord (1) à résoudre ce problème en utilisant la méthode d'approximations successives de M. Picard pour déduire les solutions exactes des solutions approchées. Malheureusement, même avec les perfectionnements que j'ai apportés à l'évaluation des restes des séries données par cette méthode, on n'opère jamais que sur des nombres positifs (tels que les coefficients de Lipschitz qui peuvent correspondre à des dérivées négatives) et l'on ne tient pas compte des compensations qui peuvent se produire entre les diverses causes d'erreur. La pratique montre que les résultats obtenus, très commodes pour les recherches théoriques, le sont bien moins pour les applications numériques.

Une méthode nouvelle, qui fait l'objet principal de ce Mé-

(1) *Comptes rendus*, 20 février et 17 juillet 1905; *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 107.

moire [1], donne de bien meilleurs résultats; elle repose sur un principe tout différent.

Avant d'en aborder l'étude, et après quelques généralités (nos 1, 2), je montre (nos 3, 4) qu'on peut estimer l'ordre de grandeur des solutions d'un système Σ' d'équations différentielles linéaires en utilisant les solutions d'un autre système Σ de même forme dont les coefficients positifs dominent [2] les coefficients correspondants de Σ'. Après avoir précisé l'énoncé du problème principal (nos 4, 5), je montre que les erreurs que comportent les solutions approchées d'un système d'équations différentielles quelconques peuvent être envisagées comme solutions d'un système linéaire déterminé Σ' assez analogue aux équations aux variations de M. Poincaré (n° 6). Bien que ce système ne soit pas entièrement connu, on peut lui appliquer la proposition précédente et retrouver ainsi (nos 7, 8) des résultats très voisins de ceux que j'avais donnés antérieurement.

Dans les méthodes nouvelles, on envisage encore les erreurs comme solutions d'un système linéaire avec seconds membres σ dont la formation (n° 10) comporte un certain degré d'arbitraire. Les seconds membres dépendent encore des solutions exactes cherchées, mais doivent être, ainsi que leurs dérivées premières, petits en valeur absolue; les coefficients des premiers membres ne contiennent que des éléments connus.

Si les seconds membres des équations σ étaient connus, un procédé donné par Cauchy, et rappelé au n° 9, pour l'intégration des équations linéaires non homogènes donnerait les erreurs sous formes d'intégrales définies. Ne pouvant calculer exactement ces intégrales, on peut d'abord déterminer une limite supérieure de leurs valeurs absolues, et obtenir ainsi (n° 11) une solution du problème posé. On peut aussi calculer approximativement les seconds membres de σ et les intégrales définies en estimant les erreurs que comportent ces approximations (n° 12). Cette seconde méthode revient à déduire des solutions approchées données d'autres solutions paraissant plus approchées. On est amené ainsi naturellement à un procédé d'approximations succes-

---

[1] Elle a été résumée dans une Note aux *Comptes rendus* (10 février 1908).
[2] Pour le sens de ce mot, *voir* n° 2.

sives (nos 13, 14) comprenant comme cas particuliers celui de M. Picard, et où les quadratures de cette dernière méthode sont remplacées par l'intégration de systèmes linéaires à seconds membres. Ce procédé qui avait été utilisé, mais non, que je sache, justifié, donne à son tour un résultat utile concernant l'estimation des erreurs.

Les résultats précédents ne font intervenir que des hypothèses assez larges (1) concernant les systèmes différentiels auxquels on les applique. Par cela même, ils semblent utiles en Physique (2).

J'ai essayé de les appliquer à un exemple ne présentant rien d'artificiel, qui fera l'objet d'un article des *Annales de l'Université de Grenoble*. Il m'a été fourni par la théorie du pendule de Foucault. Les équations du mouvement ne semblent pas susceptibles d'une intégration exacte; dans la théorie élémentaire, on les réduit à leur partie linéaire. En étudiant cette approximation par nos diverses méthodes, on obtient toujours une région où le pendule doit se trouver au bout d'une oscillation. Mais, alors que les premières donnent pour cette région des dimensions de beaucoup supérieures à la déviation qu'on doit observer, la dernière, avec les données numériques de l'expérience du Panthéon, donne pour la dimension correspondant à la déviation une fraction de la déviation inférieure à 0,2. Cette fraction pourrait être bien réduite en apportant plus de soin dans l'application de la méthode; mais il m'a semblé que l'exemple précédent, tel qu'il est, suffisait à montrer l'intérêt de cette méthode.

1. Nous regarderons, dans la suite, comme résolu le problème de l'intégration approchée d'un système Σ d'équations différen-

---

(1) Cependant, au cours de ce travail, j'ai fait sur les systèmes différentiels étudiés des hypothèses plus restrictives qu'il n'eût été nécessaire pour l'exactitude des résultats. Cela m'a permis de donner des démonstrations assez brèves.

(2) Il semble, en effet, que des théorèmes supposant des équations analytiques ne soient pas très bien adaptés à des lois physiques parfois assez grossièrement approchées. D'autre part, sans tenir compte des discordances que peuvent présenter avec la réalité des énoncés précis de lois physiques, ces énoncés peuvent conduire à l'emploi successif de plusieurs équations analytiques distinctes pour un même problème. Tel est le cas du mouvement sur une courbe avec résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

tielles linéaires; nous donnerons donc d'abord quelques indications rapides sur ce sujet.

Dans le cas particulier très important où Σ est à coefficients constants, l'intégration exacte est possible et se ramène à des opérations algébriques. La théorie des fonctions permet également d'intégrer certaines classes d'équations différentielles linéaires. D'autre part, si le système linéaire Σ est constitué par les équations aux variations correspondant à un système différentiel dont on connaît la solution générale, ce système s'intègre immédiatement.

Ces résultats bien connus sont intéressants au point de vue de l'usage que nous ferons des équations linéaires, à cause de l'arbitraire subsistant dans le choix des systèmes Σ que nous utiliserons. Nous pourrons, en effet, substituer à un système Σ un système voisin Σ' de même forme quelle que soit la nature, au point de vue de la théorie des fonctions, des coefficients de Σ et de Σ', pourvu que les différences entre les coefficients correspondants restent petites en valeur absolue et qu'il en soit de même des dérivées premières de ces coefficients. Pour intégrer approximativement Σ, on cherchera donc un système voisin Σ' qui soit intégrable. Nous n'insisterons pas sur les problèmes d'interpolation auxquels conduirait l'application de cette méthode.

2. On peut aussi employer la méthode d'approximations successives de M. Picard à l'intégration approchée d'un système linéaire Σ. Les approximations successives convergent dans tout l'intervalle de régularité des coefficients de Σ. Il sera souvent commode, dans l'application de cette méthode, de prendre comme premières approximations non des constantes, mais des fonctions convenablement choisies de la variable indépendante. Il serait naturel par exemple de prendre comme premières approximations les intégrales d'un système Σ', linéaire comme Σ, mais ayant comme coefficients des constantes égales aux valeurs moyennes des coefficients de Σ dans l'intervalle où l'on considère la variable indépendante.

Nous montrerons maintenant comment les approximations successives conduisent à une proposition intéressante concernant la comparaison des solutions de certains systèmes linéaires.

Nous abrégerons beaucoup le langage à l'aide de la locution sui-

vante : *Nous dirons qu'une fonction* $F(t)$ *supérieure ou égale à la valeur absolue d'une autre fonction* $f(t)$ *dans un certain intervalle* DOMINE *cette fonction* $f(t)$ *ou en est une* DOMINANTE *dans l'intervalle considéré.* Une fonction ne peut être négative dans l'intervalle où elle en domine une autre.

3. Soient

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + b_i,$$

$$(2) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = a'_{i1}x'_1 + \ldots + a'_{in}x'_n + b'_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

deux systèmes d'équations linéaires. Nous supposons que dans l'intervalle I

$$t_0 \leqq t \leqq T,$$

les a et les b dominent les a' et les b' de mêmes indices, ces diverses fonctions étant continues.

Comparons les solutions de (1) et (2) définies par les données initiales

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} t = t_0, & & \\ x_1 = x_{10}, & \ldots, & x_n = x_{n0}, \\ x'_1 = x'_{10}, & \ldots, & x'_n = x'_{n0} \end{array} \right.$$

satisfaisant aux inégalités

$$(4) \qquad x_{10} \geqq |x'_{10}|, \qquad \ldots, \qquad x_{n0} \geqq |x'_{n0}|.$$

A cet effet, prenons comme premières approximations, dans l'intégration de (1) et (2) par la méthode de M. Picard, les données initiales correspondantes. Les approximations suivantes y'_i, y'^1_i ont pour dérivées

$$(5) \qquad \frac{dy'_i}{dt} = a_{i1}x_{10} + \ldots + a_{in}x_{n0} + b_i,$$

$$(6) \qquad \frac{dy'^1_i}{dt} = a'_{i1}x'_{10} + \ldots + a'_{in}x'_{n0} + b_i,$$

et pour valeurs initiales

$$t = t_0, \qquad y'_i = x_{i0}, \qquad y'^1_i = x'_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit immédiatement que les fonctions

$$y_i^1 + y_i'^1, \quad y_i^1 - y_i'^1$$

ont leurs dérivées positives ou nulles dans I. Leurs valeurs initiales sont aussi positives ou nulles; ces fonctions sont donc positives ou nulles dans I. Donc les y^1 dominent les y'^1 correspondants :

$$y_1^1 \geqq |y_1'^1|, \quad \ldots, \quad y_n^1 \geqq |y_n'^1|.$$

Ces inégalités sont analogues aux inégalités (4).

On peut reprendre sur les troisièmes approximations $y_i^2, y_i'^2$ le raisonnement précédent; on retrouve le même résultat qu'on étend ensuite à toutes les approximations successives et, par suite, à leurs limites, c'est-à-dire aux intégrales x_i, x_i' des équations (1) et (2) : les x dominent, dans I, les x' correspondants.

Un système linéaire d'ordre quelconque peut toujours être ramené au premier ordre par l'introduction d'inconnues auxiliaires; nous pouvons donc énoncer de la façon suivante le résultat qui vient d'être établi :

Soient Σ, Σ' *deux systèmes d'équations différentielles linéaires construits de la même façon avec des fonctions inconnues correspondantes, résolus par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des fonctions inconnues. On suppose que, dans un intervalle* I ($t_0 \leqq t \leqq$ T) *de variation de la variable indépendante commune* t, *les coefficients de* Σ *dominent les coefficients correspondants de* Σ', *que les données initiales correspondent à la borne inférieure de l'intervalle et que les données initiales de* Σ *dominent les données correspondantes de* Σ'.

Dans ces conditions, les solutions de Σ *déterminées par ces données initiales dominent dans l'intervalle* I *les solutions correspondantes de* Σ'. *Le même résultat s'étend aux dérivées dont l'ordre ne surpasse pas l'ordre des équations par rapport aux fonctions inconnues correspondantes.*

4. Ce théorème peut être généralisé. En effet, l'hypothèse que Σ et Σ' sont linéaires sert uniquement à justifier (par la méthode de M. Picard) l'existence des solutions de (1) et (2) dans l'intervalle I. En modifiant la définition de cet intervalle, *on pourrait*

énoncer un théorème analogue pour le cas où les seconds membres des équations de Σ *et* Σ' *seraient des polynomes de degré quelconque ou des séries entières par rapport aux variables* x *et* x'. Nous laisserons de côté, malgré leur intérêt, cette généralisation et d'autres plus étendues encore, pour aborder l'objet principal de cette étude, que nous allons maintenant indiquer.

5. Soit un système S d'équations différentielles résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues

$$(S) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut toujours donner cette forme à un système d'ordre supérieur au premier par l'emploi d'inconnues auxiliaires. Toutefois, lorsque nous aurons de tels systèmes, nous pourrons, sans inconvénient, nous dispenser d'écrire celles de leurs équations servant à définir les inconnues auxiliaires.

Nous admettrons que, quand le point $(t, X_1, \ldots, X_n)$ appartient à un domaine borné D à $n+1$ dimensions, les fonctions $f_i(t; X_1, \ldots, X_n)$ sont continues par rapport à leurs divers arguments et admettent, par rapport à $X_1, \ldots, X_n$, des dérivées premières continues dans D. De cette hypothèse il résulte que, le point $t, X_1, \ldots, X_n$ se déplaçant dans D et t restant fixe, toute dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ a une borne supérieure et une borne inférieure finies. Par suite, on peut admettre qu'à chaque dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ correspond une fonction (positive ou nulle) de t que nous désignerons par a_{ik}, telle qu'on ait l'inégalité

$$a_{ik} \geqq \left| \frac{\partial f_i(t; X_1, \ldots, X_n)}{\partial X_k} \right|$$

pour tous les points $t, X_1, \ldots, X_n$ de D.

Si le segment de droite joignant deux points $t, X_1, \ldots, X_n$ et $t, X'_1, \ldots, X'_n$ est tout entier intérieur à D, on a l'inégalité suivante, analogue à celle de Lipschitz :

$$|f_i(t; X_1, \ldots, X_n) - f_i(t; X'_1, \ldots, X'_n)| \leqq a_{i1} |X_1 - X'_1| + \ldots + a_{in} |X_n - X'_n|$$

Pour cette raison, nous dirons que la fonction a_{ik} de la variable t associée à la dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ est *le coefficient de Lipschitz* correspondant à f_i et à X_k.

On peut choisir d'une infinité de façons ces coefficients de Lipschitz; on peut, en particulier, prendre les constantes A_{ik} telles que

$$A_{ik} \geqq a_{ik}.$$

Soit $t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$ un point intérieur à D. Le système (S) admet pour $t > t_0$ et assez voisin de t_0 des *solutions exactes* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ prenant respectivement pour $t = t_0$ les valeurs initiales $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. La *courbe intégrale exacte* est l'ensemble des points $t, x_1(t), \ldots, x_n(t)$; elle atteint nécessairement [1] la frontière de D. Nous appellerons θ un nombre tel que, dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq \theta$, la courbe intégrale exacte reste intérieure à D.

Des fonctions $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ peu différentes de $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq \theta$ seront dites dans cet intervalle *solutions approchées* de S. Observons qu'avec cette définition, n fonctions continues quelconques satisfaisant à peu près pour $t = t_0$ aux données initiales proposées peuvent, dans un intervalle assez petit de borne inférieure t_0, être regardées comme solutions approchées. Mais, en général, les solutions approchées sont les solutions exactes d'un système différentiel facile à intégrer et différant peu de S.

Le plus souvent, *nous ne nous préoccuperons pas de l'origine des solutions approchées, et, les supposant connues, nous chercherons à estimer les erreurs correspondantes.* Nous allons préciser l'énoncé de ce problème.

Les *erreurs* des solutions approchées $y(t)$ par rapport aux solutions exactes $x(t)$ sont les différences

$$\delta_1(t) = x_1(t) - y_1(t), \quad \ldots, \quad \delta_n(t) = x_n(t) - y_n(t).$$

La détermination exacte des erreurs revient à l'intégration exacte de S; elle est donc en général pratiquement impossible. On se contentera donc d'*estimer* les erreurs, c'est-à-dire de *déter-*

---

[1] Painlevé.

miner des fonctions $\Delta_1(t), \ldots, \Delta_n(t)$ *aussi petites que possible, dominant respectivement les erreurs* $\delta_1(t), \ldots, \delta_n(t)$.

Cette détermination sera variable pour un certain intervalle $I(t_0 \leqq t \leqq T)$, dont la borne inférieure t_0 est la valeur initiale t_0 de la variable indépendante. Cet intervalle sera précisé dans les propositions que nous énoncerons plus loin.

En langage géométrique, on peut dire que *nous cherchons une gaine entourant la courbe intégrale approchée, où la courbe intégrale exacte reste comprise lorsque t varie dans l'intervalle* I. Nous appellerons ici *gaine* le domaine défini par les inégalités

$$t_0 \leqq t \leqq T,$$
$$y_1(t) - \Delta_1(t) \leqq X_1 \leqq y_1(t) + \Delta_1(t), \quad \ldots, \quad y_n(t) - \Delta_n(t) \leqq X_n \leqq y_n(t) + \Delta_n(t).$$

6. La proposition du n° 3 permet d'établir rapidement des résultats analogues à ceux que nous avons donnés antérieurement (¹) pour l'évaluation des erreurs.

Conservons les notations du numéro précédent, écrivons les identités (²)

$$\frac{dy_i}{dt} = f_1(t; y_1, \ldots, y_n) + \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et retranchons-les membre à membre des identités exprimant que $x_1, \ldots, x_n$ sont solutions de S.

Nous pouvons écrire, en introduisant les erreurs δ,

$$f_i(t; x_1, \ldots, x_n) - f_i(t; y_1, \ldots, y_n) = a'_{i1}\delta_1 + \ldots + a'_{in}\delta_n;$$

les a'_{ik} désignent des fonctions de t dont il serait aisé de démontrer la continuité (³). *Nous supposons toutefois que tous les points* $t, X_1, \ldots, X_n$ *tels que*

$$|X_1 - y_1| \leqq |\delta_1|, \qquad \ldots, \qquad |X_n - y_n| \leqq |\delta_n|$$

(¹) *Comptes rendus*, 20 février et 17 juillet 1905; *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 107.

(²) Nous écrirons souvent x et y au lieu de $x(t)$ et $y(t)$, et de même pour les autres fonctions de t.

(³) *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 125.

sont intérieurs au domaine D *du n°* 5, c'est ce que nous appellerons l'*hypothèse* H.

Posons maintenant

$$b'_i = \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les b' sont aussi fonctions continues de t; on peut dire que ce sont les *erreurs sur les équations.*

Nous pouvons donc considérer les erreurs *comme les solutions d'un système linéaire* (¹)

$$(\Sigma') \qquad \frac{d\delta_i}{dt} = a'_{i1}\delta_1 + \ldots + a'_{in}\delta_n + b'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces solutions sont déterminés par la condition que pour $t = t_0$ elles prennent des valeurs numériques égales aux erreurs initiales, c'est-à-dire aux différences

$$\delta_1(t_0) = y_1(t_0) - x_1(t_0), \qquad \ldots, \qquad \delta_n(t_0) = y_n(t_0) - x_n(t_0).$$

7. Appliquons à Σ' le théorème du n° 3. Les coefficients de Lipschitz a ont été définis au n° 5 comme fonctions de t; ce sont manifestement des fonctions dominantes des fonctions a' correspondantes tant que H est vérifiée.

Désignons par $b_1, \ldots, b_n$ des fonctions dominant $b'_1, \ldots, b'_n$ dans un intervalle $I_1 (t_0 \leqq t \leqq T_1)$ où la courbe intégrale approchée existe et reste intérieure à D :

$$b_i \geqq \left| \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n) \right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons alors Σ' comme l'analogue du système (2) du n° 3 et adjoignons-lui le système

$$(\Sigma) \qquad \frac{d\Delta_i}{dt} = a_{i1}\Delta_1 + \ldots + a_{in}\Delta_n + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui sera l'analogue du système (1).

(¹) On ne manquera pas d'observer l'analogie de ce système (Σ') avec le système des équations aux variations du système S et de ses solutions $x_1, \ldots, x_n$; toutefois les équations de (Σ') ne sont pas homogènes.

Le théorème donné à cet endroit nous montre qu'un système de solutions $\Delta_1(t), \ldots, \Delta_n(t)$ de Σ étant déterminé par des données initiales $\Delta_1(t_0), \ldots, \Delta_n(t_0)$ dominant les erreurs initiales $\delta_1(t_0), \ldots, \delta_n(t_0)$, les fonctions $\Delta(t)$ domineront les erreurs correspondantes $\delta(t)$ dans un intervalle I_2 $(t_0 \leqq t \leqq T_2)$ tel que : 1° les solutions exactes existent dans cet intervalle; 2° I_2 est intérieur à I_1; 3° H est vérifiée.

Ces trois conditions sont satisfaites pour *l'intervalle* I $(t_0 \leqq t \leqq T \leqq T_1)$ *défini par la condition que dans cet intervalle les points* t, $X_1, \ldots, X_n$ *de la gaine*

$$(G) \qquad t_0 \leqq t \leqq T, \qquad |X_1 - y_1| \leqq \Delta_1, \qquad \ldots, \qquad |X_n - y_n| \leqq \Delta_n$$

sont intérieurs à D.

En effet, 2° est vérifiée dans I par définition même, et la condition 3° est vérifiée manifestement dans le plus grand intervalle I'

$$t_0 \leqq t \leqq T' \leqq T,$$

où 1° est vérifiée et où la courbe intégrale exacte reste intérieure à la gaine G. Il est absurde de supposer $T' < T$, car, s'il en était ainsi, la courbe intégrale exacte qui ne peut avoir un point d'arrêt dans D sortirait de G par un point $T' X, X_t, \ldots, X_n$ tel que l'une des différences $X - y$ serait égale en valeur absolue à la valeur (pour $t = T'$) de la fonction Δ de même indice, et cela est incompatible avec le fait que les Δ dominent les δ [1].

8. Nous résumerons de la façon suivante le résultat obtenu :

Soit S *un système d'équations différentielles satisfaisant dans un domaine borné* D *aux conditions du n° 5. A tout point intérieur à ce domaine correspond une courbe intégrale exacte* C_x. *Pour étudier cette courbe, on part d'une courbe intégrale approchée* C_y *supposée connue, et l'on construit une gaine* G *entourant* C_y, *intérieure à* D, *et comprenant* C_x *à son intérieur. Les dimensions de cette gaine sont des fonctions de* t, *dominant les erreurs, qu'on détermine par l'intégration*

---

[1] Nous laissons de côté le cas évidemment exceptionnel où les inégalités exprimant que les Δ dominent les δ se transformeraient en égalités.

d'un système linéaire Σ, *correspondant équation par équation à* S, *construit avec les coefficients de Lipschitz a, et les fonctions b dominant les erreurs b' sur les équations* (¹).

Quand on applique la proposition précédente à la détermination des erreurs que comportent certaines approximations classiques, les résultats numériques sont suivant les cas satisfaisants ou invraisemblables. On voit bien vite la cause de cette irrégularité dans le succès de la méthode : Alors que les coefficients figurant dans les équations de Σ' peuvent avoir des signes quelconques, ceux de Σ sont tous positifs (²). Les fonctions Δ peuvent être bien supérieures aux fonctions δ correspondantes; de plus, ces fonctions Δ croissent en général très rapidement avec t. Il y a donc lieu de *chercher une méthode tenant compte, autant que possible, non seulement de la grandeur, mais aussi des signes des coefficients de* Σ'.

C'est ce que nous ferons, après avoir rappelé un procédé dû à Cauchy pour déduire les solutions d'un système linéaire non homogène de celles du système homogène correspondant.

9. *Pour intégrer le système linéaire non homogène*

$$(\sigma) \qquad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \ldots - A_{in}\delta_n = B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) Ce résultat est très voisin de celui que nous avons donné antérieurement (Mémoire des *Acta*, cité plus haut, nos 1 à 6). Il en diffère cependant par le mode de démonstration, qui est ici plus simple, et par les résultats. Les hypothèses sur les fonctions f faites au n° 5 sont plus restreintes que celles faites dans le travail précédent; cela a peu d'importance pratique. La définition du domaine D est ici plus large (nous avions supposé antérieurement que D était une gaine); cela peut présenter quelque intérêt dans des questions de Mécanique, lorsque la variable indépendante (le temps t) ne figure pas explicitement dans les équations. On peut alors avantageusement définir D par l'intégrale des forces vives et un intervalle arbitraire de variation du temps.

On aurait des résultats plus complets en revenant à notre premier mode de démonstration; mais celui qui est adopté ici est mieux en harmonie avec la suite du travail, où le système Σ' joue un rôle essentiel.

(²) Par exemple, pour estimer l'influence exercée par une force perturbatrice sur un mobile soumis à l'action d'un centre fixe supposée proportionnelle à la distance, on serait donc conduit, toutes choses égales d'ailleurs, aux mêmes équations Σ, que l'action soit attractive ou répulsive.

(où les A *et* B *désignent des fonctions connues de* t*), on détermine les systèmes de solutions du système homogène correspondant :*

$$(7)\qquad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \ldots - A_{in}\delta_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que pour $t = \alpha$ *une seule des fonctions inconnues est égale à l'unité, les autres étant nulles. Soient*

$$(8)\qquad \delta_1 = \varphi_{1,i}(t, \alpha), \qquad \delta_2 = \varphi_{2,i}(t, \alpha), \qquad \ldots, \qquad \delta_n = \varphi_{n,i}(t, \alpha)$$

les solutions de (7) *telles que* $\varphi_{ii}(\alpha, \alpha) = 1$, $\varphi_{ki}(\alpha, \alpha) = 0$ *pour* $k \neq i$.

Les formules

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [B_1(\alpha)\varphi_{k,1}(t, \alpha) + B_2(\alpha)\varphi_{k,2}(t, \alpha) + \ldots + B_n(\alpha)\varphi_{k,n}(t, \alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

déterminent alors les solutions des équations (σ) *s'annulant pour* $t = t_0$ [1].

La solution générale s'en déduit aisément.

La méthode s'applique aux systèmes linéaires d'ordre supérieur, mais il n'est pas nécessaire d'écrire les inconnues auxiliaires permettant de ramener le système au premier ordre.

Par exemple, pour intégrer le système non homogène

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} - a\dfrac{dx}{dt} - b\dfrac{dy}{dt} - cx - dy = f(t), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - a_1\dfrac{dx}{dt} - b_1\dfrac{dy}{dt} - c_1x - d_1y = f_1(t), \end{array} \right.$$

on détermine les solutions du système linéaire sans seconds membres correspondant, savoir :

$$x = \psi(t, \alpha), \qquad y = \varpi(t, \alpha),$$

telles que, pour $t = \alpha$,

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0,$$

---

[1] Si quelques-unes des équations (σ) sont homogènes, il est inutile de calculer les fonctions φ correspondantes; si $B_i = 0$, $\varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{ni}$ sont inutiles.

et

$$x = \psi_1(t, \alpha), \qquad y = \varpi_1(t, \alpha),$$

telles que, pour $t = \alpha$,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 1, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

On aura pour déterminer les solutions de (10), s'annulant ainsi que leurs dérivées premières pour $t = t_0$,

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f(\alpha)\,\psi(t, \alpha) + f_1(\alpha)\,\psi_1(t, \alpha)]\,d\alpha, \\ y = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f(\alpha)\,\varpi(t, \alpha) + f_1(\alpha)\,\varpi_1(t, \alpha)]\,d\alpha; \end{cases}$$

leurs dérivées sont données par

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f(\alpha)\,\psi'(t, \alpha) + f_1(\alpha)\,\psi_1'(t, \alpha)]\,d\alpha, \\ \dfrac{dy}{dt} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f(\alpha)\,\varpi'(t, \alpha) + f_1(\alpha)\,\varpi_1'(t, \alpha)]\,d\alpha, \end{cases}$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à t.

10. Reprenons les notations et les conventions du n° 5.

Pour appliquer les résultats qui précèdent à l'estimation des erreurs, nous commencerons par écrire le système (S) sous *la forme*

$$(\mathrm{S}') \quad \frac{dx_i}{dt} - \mathrm{A}_{i1}x_1 - \ldots - \mathrm{A}_{in}x_n = h_i(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les A *désignent des fonctions de t, et où les dérivées premières des fonctions h par rapport aux variables x sont supposées petites au voisinage du système considéré de solutions approchées* $y_1(t), \ldots, y_n(t)$. Nous dirons alors qu'on a donné au système proposé une forme *pseudo-linéaire*.

Le système (S) se présente naturellement sous une telle forme lorsque les solutions approchées sont obtenues, comme il arrive souvent en Mécanique (petits mouvements, oscillations autour

d'un mouvement stable), en limitant les équations de (S) à leur partie linéaire.

Dans les autres cas, on peut donner à (S) la forme pseudo-linéaire S′ en procédant de la façon suivante : chaque coefficient A_{ij} est soit égal au résultat de la substitution des solutions approchées $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ à $x_1, \ldots, x_n$ dans la dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, soit peu différent de ce résultat; l'arbitraire qui subsiste ainsi dans le choix de ces coefficients peut rendre plus aisée l'application de la méthode suivante. Les A étant déterminés, on a

$$h_i(t; x_1, \ldots, x_n) = f_i(t; x_1, \ldots, x_n) - A_{i1}x_1 - \ldots - A_{in}x_n.$$

Les dérivées partielles des f étant supposées continues, il résulte de la façon même dont on choisit les A que les dérivées partielles des h restent bien, comme on le cherchait, petites au voisinage du système des solutions approchées.

Définissons maintenant des fonctions $g(t)$ par les égalités

$$(13) \qquad \frac{dy_i}{dt} - A_{i1}y_1 - \ldots - A_{in}y_n = g_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Retranchons ces égalités des équations correspondantes de S′, *les erreurs* $\delta_i = x_i - y_i$ *satisfont au système*

$$(\sigma) \qquad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \ldots - A_{in}\delta_n = B_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les expressions $B_i(t)$ *désignant les différences*

$$h_i(t; x_1, \ldots, x_n) - g_i(t)$$

où l'on doit considérer les x *comme remplacés par les solutions cherchées de* (S′).

Les B n'étant pas entièrement connues, les intégrales (9) ne peuvent être utilisées pour le calcul exact des erreurs, mais peuvent l'être pour l'estimation de ces erreurs, ainsi que nous allons le voir.

11. *Une première méthode consiste à remplacer chaque terme de la somme à intégrer par une fonction qui le domine.*

On détermine, pour cela, des fonctions $\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)$ supé-

rieures ou égales aux valeurs absolues des différences

$$h_1(t; X_1, \ldots, X_n) - g_1(t), \qquad \ldots, \qquad h_n(t; X_1, \ldots, X_n) - g_n(t)$$

lorsque le point $(t_1, X_1, \ldots, X_n)$ reste voisin de la courbe intégrale approchée C_y. Soit $t_0 < t < T$ un intervalle où l'on veut estimer les erreurs et tel que C_y soit intérieure à D; on déterminera des fonctions $\Phi_{ki}(t, \alpha)$ respectivement supérieures aux valeurs absolues des fonctions $\gamma_{ki}(t, \alpha)$ des mêmes indices lorsque t et α varient dans cet intervalle.

Nous supposerons désormais que les solutions approchées satisfont exactement aux données initiales (¹) (lesquelles correspondent à $t = t_0$).

Les fonctions

$$(14) \qquad \Delta_k^1(t) = \int_{t_0}^{t} [\beta_1(\alpha)\Phi_{k1}(t, \alpha) + \ldots + \beta_n(\alpha)\Phi_{kn}(t, \alpha)]\, d\alpha$$

dominent les erreurs $\delta_k(t)$.

D'une façon plus précise, dans tout intervalle

$$I : t_0 \leqq t \leqq T$$

tel que $T \leqq T_1$, *que la gaine*

$$G_1 : t_0 \leqq t \leqq T, \qquad |X_1 - y_1| < \Delta_1^1, \qquad \ldots, \qquad |X_n - y_n| < \Delta_n^1$$

soit intérieure à D *et que les hypothèses faites au début de ce numéro soient vérifiées* (²), *la courbe intégrale existe et reste intérieure à la gaine* G_1.

Les exemples qui seront traités dans les *Annales de l'Université de Grenoble* montrent bien que ce résultat peut être bien plus avantageux que les résultats antérieurs.

Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, des signes des fonctions B et φ; on pourrait perfectionner parfois la méthode

---

(¹) On ramène aisément le cas général à ce cas particulier, en ajoutant aux fonctions $y(t)$ des solutions convenables des équations linéaires homogènes obtenues en supprimant les seconds membres des équations (S').

(²) Elles le sont nécessairement pour T assez voisin de t_0, puisque les $\Delta^1(t)$ tendent vers zéro en même temps que $t - t_0$.

précédente en les faisant intervenir, mais les développements suivants nous dispenseront d'insister sur ce point.

12. Nous donnerons maintenant une *seconde méthode d'estimation des erreurs consistant à calculer d'une façon approchée les intégrales définies donnant les erreurs et à évaluer l'approximation correspondante. En d'autres termes, cette seconde méthode permet de déduire de la courbe intégrale approchée connue* C_y *une autre courbe intégrale approchée* C'_y *et une gaine* G_2 *entourant cette seconde courbe et comprenant la courbe intégrale exacte à son intérieur.*

Si cette gaine G_2 est assez étroite pour que la courbe C_y en sorte, on voit que cette seconde méthode donnera parfois les signes des erreurs que comportent les premières solutions approchées.

Évaluons approximativement chacun des facteurs des produits dont les sommes constituent les fonctions figurant sous les signes $\int$ des intégrales (9).

Nous pouvons écrire d'abord

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} B_i(t) &= h_i(t; x, \ldots, x_n) - g_i(t) \\ &= [h_i(t; y_1, \ldots, y_n) - g_i(t)] \\ &\quad + [h_i(t; x_1, \ldots, x_n) - h_i(t; y_1, \ldots, y_n)] \end{aligned}\right.$$

et remplacer $B_i(t)$ par

$$(16)\quad B'_i(t) = h_i(t; y_1, \ldots, y_n) - g_i(t) = f_i(t; y_1, \ldots, y_n) - \frac{dy_i}{dt}.$$

L'erreur ainsi commise sur $B_i(t)$ est facile à estimer dès qu'on connaît une gaine G grossièrement déterminée (par la méthode du numéro précédent, par exemple) entourant la solution approchée et comprenant la courbe intégrale exacte à son intérieur. Si dans cette gaine on a

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial X_j}\right| < c_{ij}(t)$$

et si

$$|y_i - x_i| = |\delta_i| < \Delta'_i,$$

on aura

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} |B_i - B'_i| &= |h_i(t; x_1, \ldots, x_n) - h_i(t; y_1, \ldots, y_n)| \\ &< c_{i1}\Delta'_1 + \ldots + c_{in}\Delta'_n = \mathfrak{M}_i(t). \end{aligned}\right.$$

Admettons qu'on sache déterminer exactement les fonctions φ; *nous prendrons comme valeurs approchées des intégrales* (9) *donnant les* δ *les intégrales*

$$(18)\qquad \delta_k^1 = \int_{t_0}^{t} [B_1^1(\alpha)\varphi_{k1}(t,\alpha) + \ldots + B_n^1(\alpha)\varphi_{kn}(t,\alpha)]\,d\alpha,$$

et, les Φ ayant même signification qu'au numéro précédent, on aura

$$(19)\qquad |\delta_k^1 - \delta_k| < \int_{t_0}^{t} [\mathfrak{B}_1(\alpha)\Phi_{k1}(t,\alpha) + \ldots + \mathfrak{B}_n(\alpha)\Phi_{kn}(t,\alpha)]\,d\alpha = \Delta_k^2(t).$$

Si les fonctions φ *n'étaient pas exactement connues,* on leur substituerait des fonctions voisines; les relations (18) et (19) subiraient de petites modifications faciles à imaginer.

Les nouvelles intégrales approchées sont

$$y_1^1 = y_1 + \delta_1^1, \qquad \ldots, \qquad y_n^1 = y_n + \delta_n^1,$$

et la gaine G_2 *est déterminée par*

$$t_0 < t < T, \qquad |X_1 - y_1^1| < \Delta_1^2, \qquad \ldots, \qquad |X_n - y_n^1| < \Delta_n^2;$$

T doit être assez voisin de t_0 pour que les points intérieurs à la gaine G_2 soient aussi intérieurs à la gaine G.

Nous donnerons plus tard un exemple où cette méthode se trouve bien supérieure à la précédente.

Il est à peine besoin de dire que, dans l'application de ces dernières méthodes (nos 11 et 12), la remarque du n° 9 relative au système d'ordre supérieur apporte de notables simplifications.

13. Il est naturel de chercher à opérer sur les y^1 comme sur les y et à en déduire un nouveau système de solutions approchées y^2, et ainsi de suite. Du système $y_1^p, \ldots, y_n^p$ on déduit le système $y_1^{p+1}, \ldots, y_n^{p+1}$ comme système de solutions des équations

$$(20)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy_i^{p+1}}{dt} - A_{i1}y_1^{p+1} - \ldots - A_{in}y_n^{p+1} = h_i(t; y_1^p, \ldots, y_n^p) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

déterminé par les conditions initiales auxquelles les x doivent satisfaire.

On peut démontrer que *les aproximations ainsi obtenues* $y_1^p, \ldots, y_n^p$ *tendent, lorsque p croît indéfiniment, vers des fonctions* $x_1, \ldots, x_n$ *qui sont les solutions exactes du système* S.

Posons en effet

$$\delta_i^{p+1} = y_i^{p+1} - y_i^p;$$

on a

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{d\delta_i^{p+1}}{dt} - A_{i1}\delta_1^{p+1} - \ldots - A_{in}\delta_n^{p+1} \\ \quad = h_i(t; y_1^p, \ldots, y_n^p) - h_i(t; y_1^{p-1}, \ldots, y_n^{p-1}) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient $c_{ij}(t)$ des limites supérieures des valeurs absolues des dérivées $\dfrac{\partial h_i}{\partial X_j}$ pour les points t, $X_1, \ldots, X_n$ intérieurs à D; les seconds membres des équations (21) donnent lieu aux inégalités

$$|h_i(t; y_1^p, \ldots, y_n^p) - h_i(t; y_1^{p-1}, \ldots, y_n^{p-1})| < c_{i1}|\delta_1^p| + \ldots + c_{in}|\delta_n^p|.$$

On pourra toujours construire un système linéaire

$$(22) \qquad \frac{dv_i}{dt} - \mathcal{A}_{i1}v_1 - \ldots - \mathcal{A}_{in}v_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tel que pour

$$t_0 \leqq \alpha \leqq t \leqq T$$

les solutions

$$v_1 = \psi_{1i}(t, \alpha), \qquad \ldots, \qquad v_n = \psi_{ni}(t, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

déterminées comme au n° 9 par les conditions initiales

$$\psi_{ii}(\alpha, \alpha) = 1, \qquad \psi_{ki}(\alpha, \alpha) = 0 \qquad (k \neq i)$$

soient finies et dominent respectivement les fonctions $\varphi_{1i}(t, \alpha), \ldots, \varphi_{ni}(t, \alpha)$ *de mêmes indices* [1].

Nous prendrons alors, pour appliquer les résultats des n°s 11 et 12,

$$\Phi_{ki}(t, \alpha) = \psi_{ki}(t, \alpha)$$

---

[1] Il suffirait, par exemple, de prendre pour coefficients $\mathcal{A}$ des fonctions finies dominant les coefficients correspondants A, mais tout autre procédé de formation du système (22) conviendrait également.

pour toutes les valeurs possibles des indices k et i. *Désignons par* $\overline{B}_i(t)$ *des fonctions dominant dans l'intervalle* t_0, T *les fonctions* $B_i^1(t) = h_i(t, y_1, \ldots, y_n) - g_i(t)$ *de même indice.*

Considérons maintenant les fonctions $\mathfrak{D}_i^p$ définies par les systèmes linéaires

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{D}_i^1}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathfrak{D}_1^1 - \ldots - \mathcal{A}_{in}\mathfrak{D}_n^1 = \overline{B}_i, \\ \dfrac{d\mathfrak{D}_i^{p+1}}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathfrak{D}_1^{p+1} - \ldots - \mathcal{A}_{in}\mathfrak{D}_n^{p+1} = c_{i1}\mathfrak{D}_1^p + \ldots + c_{in}\mathfrak{D}_n^p \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

et par les conditions initiales $\mathfrak{D}_i^p = 0$ pour $t = t_0$ quels que soient i et p. Ces fonctions $\mathfrak{D}_i^p$ dominent, dans un certain intervalle issu de t_0, les fonctions δ_i correspondantes. (On le démontre facilement de proche en proche.)

Les séries

$$(24)\qquad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i^1 + \mathfrak{D}_i^2 + \mathfrak{D}_i^3 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont uniformément convergentes et leurs sommes sont les solutions du système linéaire

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{D}_i}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathfrak{D}_1 - \ldots - \mathcal{A}_{in}\mathfrak{D}_n = c_{i1}\mathfrak{D}_1 + \ldots + c_{in}\mathfrak{D}_n + \overline{B}_i \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

s'annulant pour $t = t_0$. En effet, si les $\mathcal{A}$, les c et les $\overline{B}$ sont des constantes positives, les intégrales de (25) déterminées par ces conditions initiales sont développables en séries dont les termes sont des polynomes homogènes par rapport aux variables c; et l'on vérifie sans peine que ces termes coïncident avec les fonctions $\mathfrak{D}_i^p$ que nous venons de définir. Si maintenant les $\mathcal{A}$, les c et les $\overline{B}$ sont des fonctions de t, on démontre la propriété énoncée en comparant les séries (24) aux séries correspondantes formées avec un système analogue à (25), mais à coefficients constants supérieurs aux coefficients correspondants de (25).

Les sommes $\mathfrak{D}$ des séries (24) sont des fonctions de t positives et croissantes dans l'intervalle de t_0 à T, s'annulant pour $t = t_0$. *Nous prendrons* T *assez voisin de* t_0 *pour que la gaine*

$$(\mathcal{G})\quad t_0 \leqq t \leqq T, \quad y_1 - \mathfrak{D}_1 \leqq X_1 \leqq y_1 + \mathfrak{D}_1, \quad \ldots, \quad y_n - \mathfrak{D}_n \leqq X_n \leqq y_n + \mathfrak{D}_n$$

soit intérieure à D. Admettons que cette condition soit satisfaite; les divers termes des séries

$$(26) \qquad \delta_i = \delta_i^1 + \delta_i^2 + \delta_i^3 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont bien définis et sont dominés par les termes correspondants des séries (24); les séries (26) sont alors uniformément convergentes, et l'on vérifie que *les sommes* $x_i = y_i + \delta_i$ *qui sont les limites des approximations* y_i^p *quand p croît indéfiniment satisfont au système* (S).

Le procédé d'approximations successives qui précède avait été employé en Mécanique, mais n'avait pas été justifié jusqu'ici.

Il comprend en particulier le procédé de M. Picard, puisque les A et les $\mathcal{A}$ peuvent être nuls sans que la théorie précédente cesse d'être valable.

14. Au point de vue de la recherche des erreurs dans l'intégration approchée, *ce procédé d'approximation nous donne une nouvelle méthode d'évaluation des erreurs.* On a, en effet, dans l'intervalle $t_0 T$ qui vient d'être défini, les inégalités

$$(27) \qquad |\delta_i| < \mathfrak{D}_i,$$

$$(28) \qquad |\delta_i - \delta_i^1| < \mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les premières sont à rapprocher des résultats du n° **11**, les secondes de ceux du n° **12**. On aurait des résultats analogues en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries (26).

Ces résultats présentent, par rapport à ceux des n^{os} **11** et **12**, l'avantage de faire intervenir les fonctions

$$B_i^1(t) = f_i(t; y_1, \ldots, y_n) - \frac{dy_i}{dt},$$

qui ne dépendent que des solutions approchées, au lieu des fonctions

$$B_i(t) = f_i(t; x_1, \ldots, x_n) - g_i(t),$$

qui dépendent en outre des solutions exactes.

Grâce à cette circonstance, cette nouvelle méthode s'applique au problème suivant :

Trouver des conditions suffisantes pour que des solutions approchées d'un système différentiel ne présentent, par rapport aux solutions exactes, que des erreurs inférieures en valeur absolue à des nombres donnés.

On perfectionnerait ainsi les résultats que nous avons donnés antérieurement [1].

Le problème dont on vient de rappeler l'énoncé est important pour l'étude des procédés d'intégration approchée (en particulier pour la méthode de Cauchy-Lipschitz).

---

[1] *Acta mathematica*, n° 7, t. XXXI, p. 115.

FIN DU TOME XXXVI.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXVI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

Pages.

État de la Société mathématique au commencement de 1908 V

Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation..... XIV

Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son *Bulletin*..... XV

Comptes rendus des séances..... 1, 206

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[H 11 c] **d'Adhémar (R.).** — Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire..... 195

[O 6 d α] **Barré.** — Sur une propriété des surfaces cerclées..... 58

[Q 1 b] **Combebiac.** — Sur la génération des métriques..... 133

[H 4 j] **Cotton (Ém.).** — Sur l'intégration approchée des équations différentielles..... 225

[Q 2] **Drach (J.).** — Sur les systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien à *n* dimensions..... 85

[H 1 g] **Dulac (H.).** — Remarque sur les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes... 126

[H 1 g] **Dulac (H.).** — Sur les intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle..... 216

[D 4 f] **Goursat (E.).** — Démonstration élémentaire d'un théorème de Weiertrass..... 209

[D 6 e] **Hadamard.** — Sur l'expression asymptotique de la fonction de Bessel..... 77

[H 11 c] **Lebesgue (H.).** — Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm..... 3

[H 9 h] **Le Roux (J.).** — Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles..... 129

[I 19 c] **Maillet (Edm.).** — Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers..... 69

Pages

[O 6 s] **de Montcheuil.** — Détermination des surfaces qui admettent une surface moyenne donnée..... 40

[A 3 e] **Petrovitch (M.).** — Sur une suite de fonctions rationnelles rattachées aux équations algébriques..... 141

[O 5 i] **Raffy (L.).** — Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues..... 150

[H 1 b] **Rémoundos (G.).** — Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre..... 185

[B 1 a] **de Séguier.** — Sur la théorie des matrices..... 20

Table des matières du Tome XXXVI..... 247

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXVI.

43837 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands Augustins.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-SIXIÈME.

PARIS,

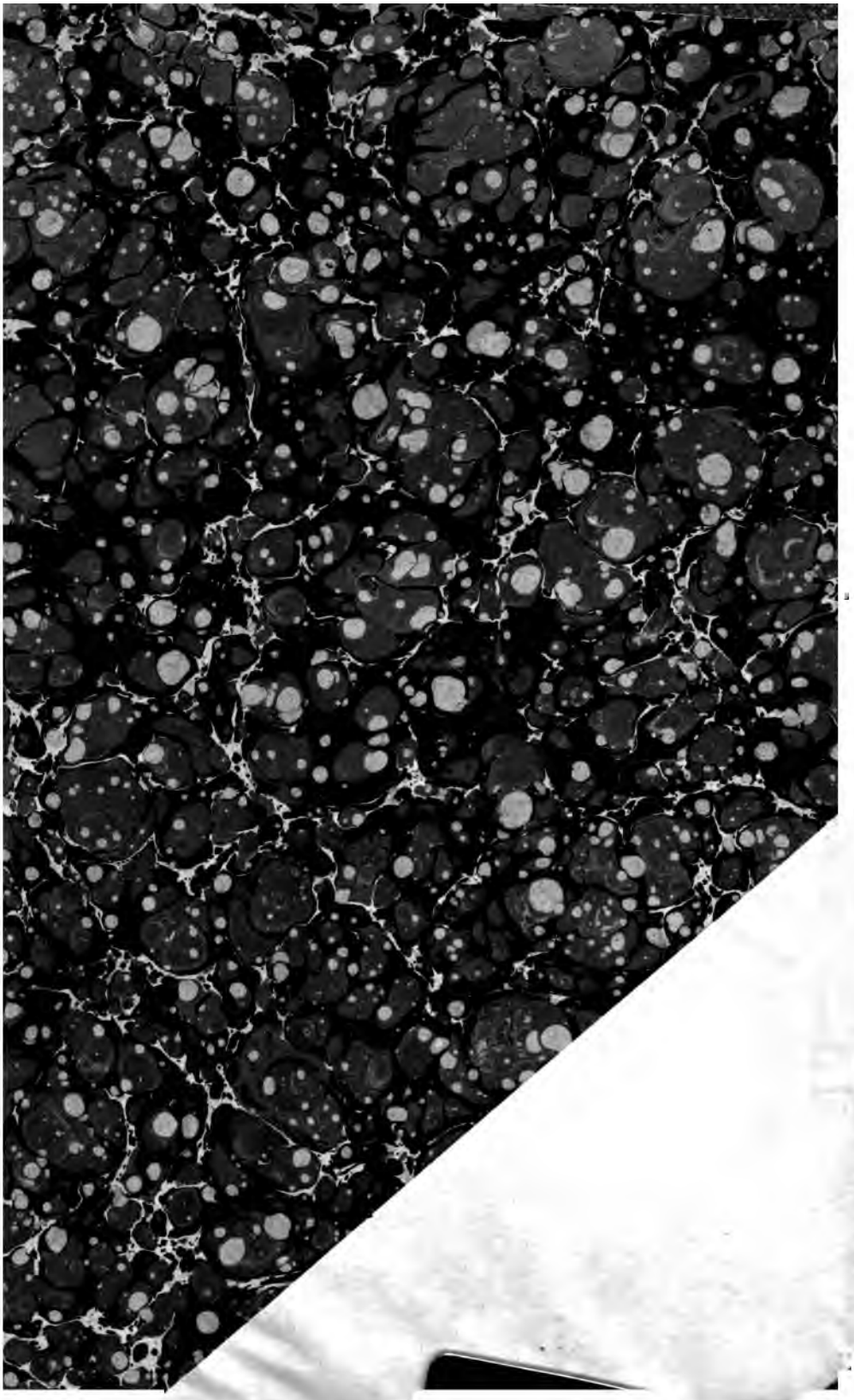
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—

1908

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

MAY 4 1961